20) $W = \{F(F(x,y,c), y, c) = F_1(x),\ F(u, u, x) = F_1(y)\}$.

Литерой сигнатуры Σ называется атомная формула или отрицание атомной формулы сигнатуры Σ. Дизъюнктом сигнатуры Σ называется литера сигнатуры Σ или дизъюнкция литер сигнатуры Σ. Примеры дизъюнктов сигнатуры $\Sigma = \{P^{(1)}, F_1^{(1)}, F_2^{(2)}, c\}$:

$P(F_1(x))$, $\neg P(F_1(x))$, $P(F_1(x)) \vee \neg(F_1(x) = F_2(x,y))$,

$P(F_2(F_1(x), z)) \vee \neg P(F_2(x,y)) \vee x = c$.

Пусть Φ - дизъюнкт сигнатуры Σ вида $\Psi_1 \vee \ldots \vee \Psi_n \vee X$ или $\neg\Psi_1 \vee \ldots \vee \neg\Psi_n \vee X$, где Ψ_i - атомная формула сигнатуры Σ ($1 \le i \le n$). Предположим, что множество формул $\{\Psi_1, \ldots, \Psi_n\}$ имеет НОУ σ. Тогда $\Phi\sigma$ называется склейкой Φ.

Пример 8. Пусть $\Phi \leftrightharpoons P(x) \vee P(F(y)) \vee \neg P_2(x)$. Формулы $P(x)$ и $P(F(y))$ имеют НОУ $\sigma = \{F(y)/x\}$. Следовательно, $\Phi\sigma = P(F(y)) \vee \neg P_2(F(y))$ - склейка Φ.

Упражнение 3. Определить, имеют ли следующие дизъюнкты склейки. Если да, построить их.

1) $P_1(x) \vee P_2(y) \vee P_1(F(x))$,

2) $P_1(x) \vee P_1(c) \vee P_2(F(x)) \vee P_2(F(c))$,

3) $F_1(x) = F_2(y) \vee F_1(F_2(c)) = F_2(y) \vee F_1(z) = F_2(z)$,

4) $P_1(x,y) \vee P_1(c, F(c))$,

5) $P_1(c_1) \vee P_1(c_2) \vee P_1(x)$,

6) $P_1(x) \vee P_1(F(y)) \vee P_2(x,y)$,

7) $F_1(c_1) = x \vee F_1(F_1(x)) = x$.

Пусть Φ_1, Φ_2 - два дизъюнкта, не имеющие общих переменных, L_1, L_2 - литеры в Φ_1 и Φ_2 соответственно. Если L_1 и $\neg L_2$ имеют НОУ σ, то дизъюнкт, получаемый из дизъюнкта $\Phi_1\sigma \vee \Phi_2\sigma$ вычеркиванием $L_1\sigma$ и $L_2\sigma$ называется бинарной резольвентой Φ_1 и Φ_2. Литеры L_1 и L_2 называются отрезаемыми литерами. Если $\Phi_1\sigma = L_1$ и $\Phi_2\sigma = L_2$, то полагаем бинарную резольвенту Φ_1 и Φ_2 равной 0.

Если Φ_1 и Φ_2 имеют общие переменные, то заменив в формуле Φ_2 эти общие переменные на переменные, не встречающиеся в Φ_1 и Φ_2, получаем формулу Φ_2', которая не имеет общих переменных с формулой Φ_1. Бинарной резольвентой формул Φ_1 и Φ_2 называется бинарная резольвента формул Φ_1 и Φ_2'.

Пример 9. Найти бинарную резольвенту формул $\Phi_1 \leftrightharpoons P_1(x) \vee P_2(x)$ и $\Phi_2 \leftrightharpoons \neg P_1(c) \vee P_3(x)$.

Заменим переменную x в Φ_2 на y и пусть $\Phi_2' \leftrightharpoons \neg P_1(c) \vee P_3(y)$. Выбираем $L_1 = P_1(x)$, $L_2 = \neg P_1(c)$. Так как $\neg L_2 = P_1(c)$, то L_1 и $\neg L_2$ имеют НОУ $\sigma = \{a/x\}$. Бинарная резольвента формул Φ_1 и Φ_2' получается из $\Phi_1\sigma \vee \Phi_2'\sigma = P_1(c) \vee P_2(c) \vee \neg P_1(c) \vee P_3(y)$ вычеркиванием $P_1(c)$ и $\neg P_1(c)$. Следовательно, $P_2(c) \vee P_3(y)$ – бинарная резольвента Φ_1 и Φ_2, $P_1(x)$ и $\neg P_1(c)$ – отрезаемые литеры.

Резольвентой дизъюнктов Φ_1 и Φ_2 ($res(\Phi_1, \Phi_2)$) является одна из следующих бинарных резольвент:

I) бинарная резольвента Φ_1 и Φ_2,

2) бинарная резольвента Φ_1 и склейки Φ_2;

3) бинарная резольвента склейки Φ_1 и Φ_2,

4) бинарная резольвента склейки Φ_1 и склейки Φ_2,

Пример I0. Найти $res(\Phi_1, \Phi_2)$:

$\Phi_1 \leftrightharpoons P(x) \vee P(F(y)) \vee P_1(F_1(y))$,

$\Phi_2 \leftrightharpoons \neg P(F(F_1(c_1))) \vee P_2(c_2)$

Склейка Φ_1 есть $\Phi_1' = \Phi_1\{F(y)/x\} = P(F(y)) \vee P_2(F_1(y))$.

Бинарная резольвента Φ_1' и Φ_2 есть

$P_1(F_1(F_1(c_1))) \vee P_2(c_2)$.

Следовательно, $res(\Phi_1, \Phi_2) = P_1(F_1(F_1(c_1))) \vee P_2(c_2)$.

Упражнение 4. Найти все возможные резольвенты (если есть) следующих пар дизъюнктов:

I) $\Phi_1 \leftrightharpoons \neg P_1(x) \vee P_2(x, c_1)$, $\Phi_2 \leftrightharpoons P_1(c_2) \vee P_2(c_2, c_1)$;

2) $\Phi_1 \leftrightharpoons \neg P_1(x) \vee P_2(x, x)$, $\Phi_2 \leftrightharpoons \neg P_2(c, F(c))$;

3) $\Phi_1 \leftrightharpoons F_1(x) = F_2(y, c_1) \vee P_1(x)$,
$\Phi_2 \leftrightharpoons \neg F_1(F_1(y)) = z \vee \neg P_1(F_1(y))$;

4) $\Phi_1 \leftrightharpoons \neg P(x, y, u) \vee \neg P(y, z, v) \vee \neg P(x, v, w) \vee P(u, z, w)$,
$\Phi_2 \leftrightharpoons P(F(x, y), x, y)$;

5) $\Phi_1 \leftrightharpoons \neg P(v, z, v) \vee P(w, z, w)$, $\Phi_2 \leftrightharpoons P(w, F(x, x), w)$.

Пусть S – множество дизъюнктов. Резолютивный вывод Φ из S есть такая конечная последовательность $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$ дизъюнктов, что каждый Φ_i или принадлежит S или является резольвентой дизъюнктов, предшествующих Φ_i и $\Phi_k = \Phi$.

Теорема (полнота метода резолюций). Множество S дизъюнктов невыполнимо тогда и только тогда, когда существует резолютивный вывод 0 из S.

Пример II. Доказать невыполнимость множества формул $W = \{\Phi_1, \ldots, \Phi_6\}$, где

$\Phi_1 \leftrightharpoons P_1(c_1, F(c_2), F(c_3))$,

$\Phi_2 \leftrightharpoons P_2(c_1)$,

$\Phi_3 \leftrightharpoons P_1(x, x, F(x))$,

$\Phi_4 \leftrightharpoons \neg P_1(x, y, z) \vee P_3(x, z)$,

$\Phi_5 \leftrightharpoons \neg P_2(x) \vee \neg P_1(y, z, u) \vee \neg P_3(x, u) \vee P_3(x, y) \vee P_3(x, z)$,

$\Phi_6 \leftrightharpoons \neg P_3(c_1, c_3)$.

Построим резолютивный вывод 0 из W:

$\Phi_7 \leftrightharpoons res(\Phi_2, \Phi_5) = res(\Phi_2, \Phi_5\{z/y\}) = \neg P_1(z, z, u) \vee \neg P_3(c_1, u) \vee P_3(c_1, z)$,

$\Phi_8 \leftrightharpoons res(\Phi_3, \Phi_7) = \neg P_3(c_1, F(x)) \vee P_3(c_1, x)$,

$\Phi_9 \leftrightharpoons res(\Phi_6, \Phi_8) = \neg P_3(c_1, F(c_3))$,

$\Phi_{10} \leftrightharpoons res(\Phi_4, \Phi_9) = \neg P_1(c_1, y, F(c_3))$,

$\Phi_{11} \leftrightharpoons res(\Phi_1, \Phi_{10}) = 0$.

Пример I2. Выполнимо ли множество предложений $\{\varphi_1, \varphi_2\}$; если выполнимо, построить систему, на которой предложения φ_1, φ_2 истинны:

$$\varphi_1 \rightleftharpoons \exists y \forall x z ((P_1(x,z) \to (P_2(x) \wedge P_3(y))) \wedge P_4(y)),$$

$$\varphi_2 \rightleftharpoons \forall x ((P_4(x) \to \neg P_3(x)) \wedge \exists y P_1(x,y)).$$

Пользуясь равенствами формул из упражнения 2 § 4, приведем формулы φ_1, φ_2 к виду $Q_1 x Q_2 y Q_3 z \Psi$, где Q_1, Q_2, Q_3 – кванторы, Ψ – конъюнкция дизъюнктов:

$$\varphi_1 = \exists y \forall x z ((\neg P_1(x,z) \vee P_2(x)) \wedge (\neg P_1(x,z) \vee P_3(y)) \wedge P_4(y)),$$

$$\varphi_2 = \forall x \exists y ((\neg P_4(x) \vee \neg P_3(x)) \wedge P_1(x,y)).$$

Выполнимость множества формул $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ сигнатуры $\Sigma = \{P_1^{(2)}, P_2^{(1)}, P_3^{(1)}, P_4^{(1)}\}$ равносильна выполнимости множества формул

$$\{\forall x z (\neg P_1(x,z) \vee P_2(x)), \forall x z (\neg P_1(x,z) \vee P_3(c)), P_4(c), \forall x (\neg P_4(x) \vee \neg P_3(x)), \forall x P_1(x, F(x))\} \quad (I)$$

сигнатуры $\Sigma' = \Sigma \cup \{c, F^{(1)}\}$. Действительно, пусть множество формул $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ выполнимо. Тогда существует алгебраическая система $\mathfrak{A} = \langle A; \Sigma \rangle$ и $c' \in A$ такие, что

$$\mathfrak{A} \models \forall x z (\neg P_1(x,z) \vee P_2(x)) \vee \forall x z (\neg P_1(x,z) \vee P_3(c')) \wedge P_4(c'); \quad \mathfrak{A} \models \forall x (\neg P_4(x) \vee \neg P_3(x)).$$

Кроме того, для любого $a \in A$ найдется элемент в A, который обозначим через $E(a)$, такой, что $\mathfrak{A} \models P_1(a, E(a))$, т.е. $\mathfrak{A} \models \forall x P_1(x, E(x))$. Тогда в системе $\mathfrak{A}' = \langle A; \Sigma' \rangle$, где c' является интерпретацией $c \in \Sigma'$, E – интерпретация $F \in \Sigma'$, истинны формулы из (I).

Обратно, если все формулы из (I) истинны в системе $\mathfrak{A}' = \langle A; \Sigma' \rangle$, то формулы φ_1, φ_2 будут, очевидно, истинны и в системе $\mathfrak{A} = \langle A; \Sigma \rangle$.

Исследуем множество дизъюнктов

$$\{\neg P_1(x,z) \vee P_2(x), \neg P_1(x,z) \vee P_3(c), P_4(c), \neg P_4(x) \vee \neg P_3(x), P_1(x, F(x))\} \quad (2)$$

на выполнимость с помощью метода резолюций:

$res(\neg P_1(x,z) \vee P_3(c), P_1(x, F(x))) = P_3(c)$,

$res(P_3(c), \neg P_4(x) \vee \neg P_3(x)) = \neg P_4(c)$,

$res(\neg P_4(c), P_4(c)) = 0$.

Построили резолютивный вывод 0. Следовательно, множество дизъюнктов (2) невыполнимо. Тогда и множество предложений (I) невыполнимо, что равносильно невыполнимости множества предложений $\{\varphi_1, \varphi_2\}$

Пример I3. Выполнимо ли множество предложений $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$; если выполнимо, построить систему, на которой предложения $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ истинны:

$\varphi_1 \leftrightharpoons \exists x (P_1(x) \wedge \forall y (P_2(y) \to P_3(x,y)))$,

$\varphi_2 \leftrightharpoons \forall x (P_1(x) \to \forall y (P_4(y) \to \neg P_3(x,y)))$,

$\varphi_3 \leftrightharpoons \forall x (P_2(x) \to \neg P_4(x))$.

Приведем формулы $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ к виду $Q_1 x\, Q_2 y\, \Psi$, где Q_1, Q_2 – кванторы, Ψ – конъюнкция дизъюнктов:

$\varphi_1 = \exists x \forall y (P_1(x) \wedge (\neg P_2(y) \vee P_3(x,y)))$,

$\varphi_2 = \forall x y (\neg P_1(x) \vee \neg P_4(y) \vee \neg P_3(x,y))$,

$\varphi_3 = \forall x (\neg P_2(x) \vee \neg P_4(x))$.

Так же, как в примере I2, строим множество дизъюнктов:

$$\{P_1(c), \neg P_2(y) \vee P_3(c,y), \neg P_1(x) \vee \neg P_4(y) \vee \neg P_3(x,y), \neg P_2(x) \vee \neg P_4(x)\} \quad (3)$$

Исследуем это множество на выполнимость с помощью метода резолюций:

$$res(P_1(c), \neg P_1(x) \vee \neg P_4(y) \vee \neg P_3(x,y)) = \neg P_4(y) \vee \neg P_3(c,y),$$
$$res(\neg P_2(y) \vee P_3(c,y), \neg P_4(y) \vee \neg P_3(c,y)) = \neg P_2(y) \vee \neg P_4(y). \quad (4)$$

Других резольвент для множества (3) нет, поэтому резолютивный вывод 0 из (3) не существует. Рассмотрим множество, составленное констант, входящих в формулы (3), т.е. $\{c\}$. Определим на множестве $\{c\}$ предикаты P_1, P_2, P_3, P_4 так, чтобы множество формул из (3) и (4) выполнялось на системе $<\{c\}; P_1, P_2, P_3, P_4, c>$ Из (4) следует, что необходимо потребовать либо $c \notin P_4$, либо $<c,c> \notin P_3$ и $c \notin P_2$. Положим $c \notin P_4$, $<c,c> \notin P_3$, $c \notin P_2$. Из (3) следует, что необходимо потребовать $c \in P_1$. Таким образом, на системе $<\{c\}; P_1, P_2, P_3, P_4, c>$ выполняются все формулы из (3); более того, на ней истинны все формулы из (3) с навешанными на них кванторами всеобщности по переменным x, y , что равносильно истинности формул Φ_1, Φ_2, Φ_3 на системе $<\{c\}; P_1, P_2, P_3>$

Пример I4. Выполнимо ли множество предложений $\{\Phi_1, \Phi_2\}$; если выполнимо, построить систему, на которой предложения Φ_1, Φ_2 истинны :

$$\Phi_1 \leftrightharpoons \exists u \forall x \exists z \forall y (P_3(z) \wedge ((P_2(x,z) \wedge \neg P_1(u)) \vee \neg((P_3(y) \to P_1(y)) \to P_1(u)))),$$
$$\Phi_2 \leftrightharpoons \forall x(\exists y P_2(x,y) \to \neg P_3(x)).$$

Преобразуем формулы Φ_1, Φ_2 :

$$\Phi_1 = \exists u \forall x \exists z \forall y (P_3(z) \wedge (P_2(x,z) \vee \neg P_3(y) \vee P_1(y)) \wedge \neg P_1(u)),$$
$$\Phi_2 = \forall xy(\neg P_2(x,y) \vee \neg P_3(x)).$$

Исследуем множество дизъюнктов

$$\{P_3(F(x)), P_2(x,F(x)) \vee \neg P_3(y) \vee P_1(y), \neg P_1(c), \neg P_2(x,y) \vee \neg P_3(x)\} \qquad (5)$$

на выполнимость :

$$\left.\begin{array}{l} res(\neg P_1(c), P_2(x,F(x)) \vee \neg P_3(y) \vee P_1(y)) = P_2(x,F(x)) \vee \neg P_3(c), \\ res(P_2(x,F(x)) \vee \neg P_3(c), \neg P_2(x,y) \vee \neg P_3(x)) = \neg P_3(c), \\ res(P_2(x,F(x)) \vee \neg P_3(y) \vee P_1(y), \neg P_2(x,y) \vee \neg P_3(x)) = \neg P_3(y) \vee P_1(y), \\ res(\neg P_3(y) \vee P_1(y), P_3(F(x))) = P_1(F(x)), \\ res(\neg P_2(x,y) \vee \neg P_3(x), P_3(F(x))) = \neg P_2(F(x),y). \end{array}\right\} (6)$$

Построим алгебраическую систему $\mathfrak{A} = <A; P_1, P_2, P_3, F, c>$, в которой будут истинны формулы из (5) и (6) с навешанными на них кванторами всеобщности по переменным x, y . Ясно, что $c \in A$. Поскольку $\mathfrak{A} \models \forall x(\neg P_3(c) \wedge P_3(F(x))$, то $F(c) \neq c$ Пусть $A = \{c, c'\}$. Положим $F(c) = c'$. Так как $\mathfrak{A} \models \forall x P_3(F(x))$, то необходимо, чтобы $F(c') = c'$

и $c' \in P_3$. Из (6) следует, что $c \notin P_3$.
Так как $\mathfrak{A} \models \forall x y (P_1(F(x)) \wedge \neg P_2(F(x), y))$, то
полагаем $c' \in P_1$, $\langle c', c \rangle \notin P_2$, $\langle c', c' \rangle \notin P_2$.
Предикаты P_1 и P_2 доопределяются произвольно.
Таким образом, в системе $\langle \{c, c'\}; P_1, P_2, P_3 \rangle$
такой, что $c' \in P_1$, $\langle c', c \rangle, \langle c', c' \rangle \notin P_2$, $c \notin P_3$, $c' \in P_3$,
истинны формулы Φ_1, Φ_2.

Упражнение 6. Выполнить упражнение 2 из § 3, используя метод