

Исчисление высказываний

Алфавит

$A, B, C, \dots, A_1, A_2, \dots$ — пропозициональные переменные

$\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$ — логические связки

$(,)$ — скобки

Формулы

1. Пропозициональная переменная — формула.
2. Если Φ, Ψ — формулы, то $(\Phi \wedge \Psi), (\Phi \vee \Psi), (\Phi \rightarrow \Psi), \neg\Phi$ — формулы.

Аксиомы

1. $\Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Phi)$
2. $(\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow ((\Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Theta)) \rightarrow (\Phi \rightarrow \Theta))$
3. $\Phi \wedge \Psi \rightarrow \Phi$
4. $\Phi \wedge \Psi \rightarrow \Psi$
5. $(\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow ((\Phi \rightarrow \Theta) \rightarrow (\Phi \rightarrow \Psi \wedge \Theta))$
6. $\Phi \rightarrow \Phi \vee \Psi$
7. $\Psi \rightarrow \Phi \vee \Psi$
8. $(\Phi \rightarrow \Theta) \rightarrow ((\Psi \rightarrow \Theta) \rightarrow (\Phi \vee \Psi \rightarrow \Theta))$
9. $(\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow ((\Phi \rightarrow \neg\Psi) \rightarrow \neg\Phi)$
10. $\neg\neg\Phi \rightarrow \Phi$

Φ, Ψ, Θ — формулы исчисления высказываний.

Правило вывода

$\Phi, \Phi \rightarrow \Psi \vdash \Psi$ — modus ponens

Теорема дедукции. $\Gamma, \Phi \vdash \Psi \iff \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi$.

Свойство 1. $\vdash \Phi \rightarrow \Phi$.

Свойство 2. $\Phi, \Psi \vdash \Phi \wedge \Psi$.

Свойство 3 (контрапозиции). $\Phi \rightarrow \Psi \vdash \neg \Psi \rightarrow \neg \Phi$.

Свойство 4 (транзитивности). $\Phi \rightarrow \Psi, \Psi \rightarrow \Theta \vdash \Phi \rightarrow \Theta$.

Свойство 5. $\Phi \vdash \neg \neg \Phi$.

Свойство 6. $\Phi \wedge \neg \Phi \vdash \Psi$, где Ψ — любая формула ИВ.

Свойство 7. $\vdash \Phi \vee \neg \Phi$.