## Примитивно и частично рекурсивные функции

Отображение $f : X \to \omega$, где $X \subseteq \omega^n$, называется *частичной $n$-местной функцией*, или просто *функцией*.

Если $X = \omega^n$, то функция $f$ называется *всюду определённой*.

Если $X = \varnothing$, то функция $f$ называется *нигде не определённой*.

*Базисными функциями* называют следующие функции:

1. $\theta(x) = 0$ — нулевая функция.
2. $s(x) = x + 1$ — функция следования.
3. $I_n^i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ — функция выбора (проекции).

Обозначим через $F_n$ множество всех $n$-местных частичных функций.

### Оператор суперпозиции

$$\mathcal{S} : F_m \times \underbrace{F_n \times \ldots \times F_n}_{m} \to F_n,$$

где

$$\mathcal{S}(f, g_1, \ldots, g_m) = h \overset{df}{\Leftrightarrow} h(x_1, \ldots, x_n) = f(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n)).$$

### Оператор примитивной рекурсии

$$\mathcal{R} : F_{n-1} \times F_{n+1} \to F_n,$$

где

$$\mathcal{R}(g, f) = h \overset{df}{\Leftrightarrow} \begin{cases} h(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = g(x_1, \ldots, x_{n-1}), \\ h(x_1, \ldots, x_{n-1}, k+1) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, k, f(x_1, \ldots, x_{n-1}, k)). \end{cases}$$

## Оператор минимизации

$$\mu : F_{n+1} \to F_n,$$

где $\mu(f) = h$ и $h(x_1, \ldots, x_n) = y$ тогда и только тогда, когда $f(x_1, \ldots, x_n, 0)$, $\ldots$, $f(x_1, \ldots, x_n, y-1)$ определены, причем $f(x_1, \ldots, x_n, k) \neq 0$ для всех $k < y$, и $f(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$.

Обозначение: $h(x_1, \ldots, x_n) = \mu_y[g(x_1, \ldots, x_n, y)]$.

Функция называется *примитивно рекурсивной*, если она получается из базисных функций с помощью конечного числа применений оператора суперпозиции и оператора примитивной рекурсии.

Функция называется *частично рекурсивной*, если она получается из базисных функций с помощью конечного числа применений оператора суперпозиции, оператора примитивной рекурсии и оператора минимизации.