

Исчисление предикатов

Алфавит

$x, y, z, u, v, \dots, x_1, x_2, \dots$ — переменные

$c, d, \dots, c_1, c_2, \dots$ — символы констант сигнатуры Σ

$P, Q, R, S, \dots, P_1, P_2, \dots$ — предикатные символы сигнатуры Σ

$F, G, H, \dots, F_1, F_2, \dots$ — функциональные символы сигнатуры Σ

$\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$ — логические связки

$=$ — символ равенства

$\exists, \forall$ — кванторы

$(,)$ — скобки

$,$ — запятая

Формулы

Формулы исчисления предикатов сигнатуры Σ есть формулы сигнатуры Σ . Все рассматриваемые ниже символы операций и предикатов берутся из сигнатуры Σ .

Терм:

1. Переменная — терм.

2. Если $t_1, \dots, t_n$ — термы, $F^{(n)}$ — символ операции, то $F(t_1, \dots, t_n)$ — терм.

Атомарной формулой называется выражение вида $t = g$ или $P(t_1, \dots, t_n)$, где $t, g, t_1, \dots, t_n$ — термы, $P^{(n)}$ — предикатный символ.

Формула:

1. Атомарная формула — формула.

2. Если Φ, Ψ — формулы, x — переменная, то $(\Phi \wedge \Psi), (\Phi \vee \Psi), (\Phi \rightarrow \Psi), \neg \Phi, \exists x \Phi, \forall x \Phi$ — формулы.

Аксиомы

1. $\Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Phi)$
2. $(\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow ((\Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Theta)) \rightarrow (\Phi \rightarrow \Theta))$
3. $\Phi \wedge \Psi \rightarrow \Phi$
4. $\Phi \wedge \Psi \rightarrow \Psi$
5. $(\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow ((\Phi \rightarrow \Theta) \rightarrow (\Phi \rightarrow \Psi \wedge \Theta))$
6. $\Phi \rightarrow \Phi \vee \Psi$
7. $\Psi \rightarrow \Phi \vee \Psi$
8. $(\Phi \rightarrow \Theta) \rightarrow ((\Psi \rightarrow \Theta) \rightarrow (\Phi \vee \Psi \rightarrow \Theta))$
9. $(\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow ((\Phi \rightarrow \neg \Psi) \rightarrow \neg \Phi)$
10. $\neg \neg \Phi \rightarrow \Phi$
11. $\forall x \Phi \rightarrow [\Phi]_t^x$
12. $[\Phi]_t^x \rightarrow \exists x \Phi$
13. $x = x$
14. $(x = y) \rightarrow ([\Phi]_x^z \rightarrow [\Phi]_y^z)$

Φ, Ψ, Θ — формулы исчисления предикатов, x, y, z — переменные, t — терм.

Правила вывода

1. $\Phi, \Phi \rightarrow \Psi \vdash \Psi$ — modus ponens
2. $\Phi \rightarrow \Psi \vdash \Phi \rightarrow \forall x \Psi$, если $x \notin FV(\Phi)$
3. $\Phi \rightarrow \Psi \vdash \exists x \Phi \rightarrow \Psi$, если $x \notin FV(\Psi)$

Теорема дедукции. $\Gamma, \Phi \vdash \Psi \iff \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi$.

Свойство 1. $\vdash \Phi \rightarrow \Phi$.

Свойство 2. $\Phi, \Psi \vdash \Phi \wedge \Psi$.

Свойство 3 (контрапозиции). $\Phi \rightarrow \Psi \vdash \neg \Psi \rightarrow \neg \Phi$.

Свойство 4 (транзитивности). $\Phi \rightarrow \Psi, \Psi \rightarrow \Theta \vdash \Phi \rightarrow \Theta$.

Свойство 5. $\Phi \vdash \neg \neg \Phi$.

Свойство 6. $\Phi \wedge \neg \Phi \vdash \Psi$, где Ψ — любая формула исчисления предикатов.

Свойство 7. $\vdash \Phi \vee \neg \Phi$.