Ефремов Евгений Леонидович

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Конспект лекций

Владивосток

2021 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА II

АЛГЕБРА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Основоположником математической логики можно считать Аристотеля, жившего в IV веке до н.э. В его сочинении «Первая аналитика» он рассматривал основы силлогистики — правила вывода одних утверждений из других. Например, утверждение «Сократ смертен» следует из утверждений «Все люди смертны» и «Сократ — человек» (классический пример подобного вывода).

Зарождение основной идеи математической логики как универсального языка науки (и математики в том числе) можно найти уже у Лейбница (XVII–XVIII вв.). Эта идея состоит в том, чтобы записывать математические утверждения в виде последовательностей символов и оперировать с ними по формальным правилам. При этом правильность рассуждений можно проверять механически, не вникая в их смысл. Этому и будет посвящён наш учебный курс: мы научимся проверять правильность рассуждений, изучим механизмы построения одних утверждений из других, поговорим об алгоритмах и теориях.

Приступим к изучению первого раздела математической логики — *алгебры высказываний*, которую иногда называют алгеброй логики.

Алгебра — наука, которая изучает операции над элементами некоторого множества. Например, если элементы множества — все натуральные числа, а операции — сложение и умножение, то это алгебра натуральных чисел. Действия с векторами изучает векторная алгебра. Из курса алгебры и теории чисел Вы знакомы с алгеброй многочленов, алгеброй матриц, алгеброй комплексных чисел и др.

Высказывание — первый важнейший объект изучения математической логики. Алгебра высказываний изучает способы построения высказываний из уже имеющихся высказываний, закономерности таких способов построения высказываний. Алгебра высказываний является фундаментом математической логики.

§1. Понятие высказывания

Определение. *Высказыванием* называют повествовательное предложение, про которое можно утверждать, истинно оно или ложно.

Примеры:

1) «Вода — продукт горения водорода» — истинное высказывание;
2) «Все нечётные натуральные числа простые» — ложное высказывание;
3) «Будет ли завтра дождь?» — не высказывание;
4) «В квартире холодно» — не высказывание (почему?).

Отвлечёмся от содержания высказывания и даже от его структуры. Не будем выделять в нём объект и свойства объекта. Тогда высказывание можно рассматривать как величину, которая может принимать одно из двух значений: «истина» или «ложь».

Высказывания будем обозначать заглавными буквами латинского алфавита (возможно с индексами): A, B, C, $\ldots$, A_1, A_2, $\ldots$ Значения высказываний будем обозначать буквами И (истина) и Л (ложь). Если высказывание A принимает значение И, то будем писать $A = \text{И}$. В противном случае будем писать $A = \text{Л}$.

§2. Операции над высказываниями

Определение. Пусть даны два произвольных высказывания A и B. Определим следующие операции:

1. *Конъюнкция* (обозначение: $A \wedge B$)

$$A \wedge B = \text{И} \overset{df}{\Longleftrightarrow} A = \text{И и } B = \text{И}.$$

Т.е. если хотя бы одно из высказываний A и B ложно, то конъюнкция A и B ложна. Поэтому конъюнкцию иногда называют *логическим умножением*. Вместо «конъюнкция высказываний A и B» иногда будем говорить просто «A и B».

2. *Дизъюнкция* (обозначение: $A \vee B$)

$$A \vee B = \text{И} \overset{df}{\Longleftrightarrow} A = \text{И или } B = \text{И}.$$

Нетрудно понять, что дизъюнкция высказываний A и B ложна только в том случае, когда ложны оба высказывания A и B. Поэтому дизъюнкцию иногда называют *логическим сложением*. Вместо «дизъюнкция высказываний A и B» иногда будем говорить просто «A или B».

3. *Импликация* (обозначение: $A \to B$)

$$A \to B = \text{Л} \overset{df}{\Longleftrightarrow} A = \text{И и } B = \text{Л}.$$

Высказывание A в этом случае называется *посылкой импликации*, а высказывание B — *заключением импликации*. Импликацию иногда называют *логическим следованием*. Согласно определению, импликация высказываний A и B истинна всегда, когда её посылка ложна. Это неудивительно, так как из лжи можно получить всё что угодно, т.е. неважно, какое значение принимает высказывание B. Вместо «импликация высказываний A и B» иногда будем говорить просто «импликация из A в B».

4. *Отрицание* (обозначение: $\urcorner A$)

$$\urcorner A = \text{И} \overset{df}{\Longleftrightarrow} A = \text{Л}.$$

Вместо «отрицание высказывания A» иногда будем говорить просто «не A».

Для того, чтобы менять порядок действий в выражениях, будем использовать скобки.

Как и при работе с числами, операции необходимо выполнять, руководствуясь *приоритетом*:

1. Сначала выполняется то, что записано в скобках.
2. Самой сильной операцией считается отрицание.
3. Конъюнкция и дизъюнкция — две равносильные операции!
4. Самой слабой операцией считается импликация.

Упражнение 1. Определите значение высказывания

$$(\urcorner(A \wedge B) \vee C) \to ((B \wedge C) \vee A),$$

если $A = \text{И}$, $B = \text{Л}$, $C = \text{И}$. Существует ли набор значений высказываний A, B, C, при которых данное высказывание будет ложным?

§3. Формулы алгебры высказываний

В упражнении 1 Вы уже поработали с выражением, записанным с помощью введённых нами обозначений высказываний и операций над ними. Такие выражения принято называть формулами. Но не всякое выражение (последовательность символов высказываний, операций и скобок) является формулой. В этом параграфе дадим строгое определение формулы алгебры высказываний (АВ).

Определение. Высказывания, которые принимают значения И или Л независимо от значений других высказываний, называются *элементарными высказываниями* или *логическими переменными*.

Дадим определение формулы алгебры высказываний *индуктивным способом.* Как Вы помните из курса алгебры, доказательство свойства, которому удовлетворяет любое натуральное число, методом математической индукции состоит из двух этапов:

1) проверка утверждения для наименьшего допустимого значения [база индукции];

2) доказательство утверждения для числа $n+1$ в предположении, что утверждение для числа n верно [шаг индукции].

Индуктивный способ определения похож на метод математической индукции: сначала мы перечислим «простейшие» ($\approx$ наименьшие) формулы [база индукции], а потом покажем, как из одних формул получать новые формулы [шаг индукции].

Определение *формулы алгебры высказываний*:

1) логическая переменная — формула АВ,

2) если Φ, Ψ — формулы АВ, то $(\Phi \wedge \Psi)$, $(\Phi \vee \Psi)$, $(\Phi \to \Psi)$, $\neg\Phi$ — формулы АВ.

Например, если A, B, C — логические переменные, то

$$(((A \wedge B) \wedge C) \to (\neg A \vee (C \wedge B)))$$

— формула АВ.

Очевидно, такая запись не совсем удобна — множество скобок способно запутать. Мы прекрасно понимаем, что, например, выражение из упражнения 1 представляет собой сложное высказывание, т.е. может являться формулой. Но по определению не является ввиду отсутствия внешних скобок. Введённый нами приоритет операций позволяет упрощать запись больших формул, содержащих операции над многими высказываниями, исключением скобок. Например, формула из приведённого выше примера в упрощённой форме запишется следующим образом:

$$A \wedge B \wedge C \to \neg A \vee (C \wedge B).$$

Договоримся формулы обозначать прописными буквами греческого алфавита (возможно с индексами) — Φ, Ψ, Θ, Φ_1, Φ_2, … Если все логические переменные, из которых построена формула Φ, принадлежат множеству $\{X_1, \ldots, X_n\}$, то в случае, когда это имеет значение, вместо Φ будем писать $\Phi(X_1, \ldots, X_n)$. Например,

$$\Phi(X, Y, Z) \leftrightharpoons X \vee Y \to \neg Z \wedge (X \vee Y).$$

Символ $\leftrightharpoons$ читается как «имеет вид». Мы не будем здесь использовать привычный нам символ $=$, так как уже используем его для того, чтобы указать значение высказывания.

Любую формулу АВ можно рассматривать как функцию, переменными которой являются элементарные высказывания (отсюда и другое их название — логические переменные). Такую функцию можно полностью описать конечной таблицей значений (почему?), которую называют *таблицей истинности формулы.*

Например, построим таблицы истинности бинарных операций, рассмотренных нами в §2:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \to B$
И	И	И	И	И
И	Л	Л	И	Л
Л	И	Л	И	И
Л	Л	Л	Л	И

Упражнение 2. Постройте таблицу истинности формулы

$$A \vee B \to \neg C \wedge A.$$

§4. Равносильные формулы

Всюду дальше до конца настоящей главы под формулами будем понимать формулы АВ. Если $\Phi(X_1, \ldots, X_n)$ — формула, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{\text{И, Л}\}$, то через $\Phi(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ будем обозначать значение формулы Φ при условии, что переменная X_i принимает значение ε_i для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Определение. Формулы $\Phi(X_1, \ldots, X_n)$ и $\Psi(X_1, \ldots, X_n)$ называются *равносильными* (обозначение: $\Phi \equiv \Psi$), если для любых $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{\text{И, Л}\}$

$$\Phi(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = \Psi(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n).$$

Проверим, что формулы

$$\Phi \leftrightharpoons C \wedge A \to B \text{ и } \Psi \leftrightharpoons A \to (C \to B)$$

являются равносильными. Для этого составим таблицы истинности этих формул и сравним их значения.

A	B	C	Φ	Ψ
Л	Л	Л	И	И
Л	Л	И	И	И
Л	И	Л	И	И
Л	И	И	И	И
И	Л	Л	И	И
И	Л	И	Л	Л
И	И	Л	И	И
И	И	И	И	И

Так как значения формул на одинаковых наборах значений логических переменных совпадают, то формулы равносильны.

Теорема 1. *Пусть Φ, Ψ, Θ — формулы. Тогда имеют место следующие равносильности:*

1. Законы идемпотентности
a) $\Phi \wedge \Phi \equiv \Phi$,
b) $\Phi \vee \Phi \equiv \Phi$.
2. Законы коммутативности
a) $\Phi \wedge \Psi \equiv \Psi \wedge \Phi$,
b) $\Phi \vee \Psi \equiv \Psi \vee \Phi$.
3. Законы ассоциативности
a) $\Phi \wedge (\Psi \wedge \Theta) \equiv (\Phi \wedge \Psi) \wedge \Theta$,
b) $\Phi \vee (\Psi \vee \Theta) \equiv (\Phi \vee \Psi) \vee \Theta$.
4. Законы дистрибутивности
a) $\Phi \wedge (\Psi \vee \Theta) \equiv (\Phi \wedge \Psi) \vee (\Phi \wedge \Theta)$,
b) $\Phi \vee (\Psi \wedge \Theta) \equiv (\Phi \vee \Psi) \wedge (\Phi \vee \Theta)$.
5. Законы де Моргана
a) $\neg(\Phi \wedge \Psi) \equiv \neg\Phi \vee \neg\Psi$,
b) $\neg(\Phi \vee \Psi) \equiv \neg\Phi \wedge \neg\Psi$.
6. Закон двойного отрицания
$\neg\neg\Phi \equiv \Phi$.
7. $\Phi \to \Psi \equiv \neg\Phi \vee \Psi$.
8. Законы поглощения
a) $\Phi \wedge (\Phi \vee \Psi) \equiv \Phi$,
b) $\Phi \vee (\Phi \wedge \Psi) \equiv \Phi$.

Определение. Формула АВ $\Phi(X_1, \ldots, X_n)$ называется *выполнимой* (*опровержимой*), если существует набор значений логических переменных $X_1, \ldots, X_n$, при котором Φ принимает значение И (Л).

Например, формула $\Phi(X, Y) \leftrightharpoons X \wedge Y$ и выполнимая, и опровержимая: при $X = Y =$ И она принимает значение И, при $X = Y =$ Л она принимает значение Л.

Определение. Формула $\Phi(X_1, \ldots, X_n)$ называется *тождественно истинной* (*тождественно ложной*), если при любом наборе значений логических переменных $X_1, \ldots, X_n$ она принимает значение И (Л). Тождественно истинные формулы иногда называют *тавтологиями*. Тождественно истинную формулу будем обозначать через $\mathcal{T}$, тождественно ложную — через $\mathcal{F}$.

Теорема 2. *Для любой формулы Φ имеют место следующие равносильности:*

1. $\Phi \wedge \mathcal{F} \equiv \mathcal{F}, \quad \Phi \vee \mathcal{T} \equiv \mathcal{T}.$
2. $\Phi \wedge \mathcal{T} \equiv \Phi, \quad \Phi \vee \mathcal{F} \equiv \Phi.$

Домашнее задание. Докажите теоремы 1 и 2.

Дадим определение *подформулы* формулы Φ индукцией по сложности формулы Φ.

Определение *подформулы*:

1. Если $\Phi \leftrightharpoons X$, где X — логическая переменная, то Φ — единственная подформула формулы Φ.

2. Если $\Phi \leftrightharpoons \Psi \wedge \Theta$, $\Phi \leftrightharpoons \Psi \vee \Theta$ или $\Phi \leftrightharpoons \Psi \to \Theta$, то Ψ, Θ и Φ являются подформулами формулы Φ.

3. Если $\Phi \leftrightharpoons \neg\Psi$, то Ψ и Φ являются подформулами формулы Φ.

Например, подформулами формулы $X \to \neg(Y \vee Z)$ являются следующие формулы:

$$\begin{gathered} X \to \neg(Y \vee Z), \\ X, \\ \neg(Y \vee Z), \\ Y \vee Z, \\ Y, \\ Z. \end{gathered}$$

Лемма (о замене в АВ). *Пусть Φ — формула АВ, Ψ — подформула формулы Φ, $\Psi \equiv \Psi'$, формула Φ' получается из формулы Φ заменой подформулы Ψ на Ψ'. Тогда $\Phi \equiv \Phi'$.*

Доказательство проведём, опираясь на определение подформулы — индукцией по сложности формулы Φ. Со словом «индукция» Вы достаточно часто сталкиваетесь при изучении математики. На занятиях по алгебре Вы научились доказывать утверждения про натуральные числа, на занятиях по математической логике Вы познакомились с определениями, которые даются с помощью индукции. Доказательство утверждения индукцией по сложности формулы состоит из следующих шагов:

1. Доказываем утверждение для самых простых формул. В случае алгебры высказываний такими являются логические переменные.

2. Доказываем утверждение для формулы в предположении, что это утверждение верно для всех её собственных подформул. Например, доказываем утверждение для формулы $\Psi \wedge \Theta$ в предположении, что это утверждение верно для формул Ψ и Θ.

Доказательство (леммы о замене в АВ).

1. Пусть $\Phi \leftrightharpoons X$, где X — логическая переменная. Тогда Φ — единственная подформула формулы Φ. Очевидно, что $\Phi \equiv \Phi'$.

2. Пусть $\Phi \leftrightharpoons \Phi_1 \wedge \Phi_2$, Ψ — подформула формулы Φ_1, $\Psi \equiv \Psi'$, формула Φ_1' получается из формулы Φ_1 заменой подформулы Ψ на Ψ'. Так как формула Φ_1 «проще» формулы Φ, то по предположению индукции $\Phi_1 \equiv \Phi_1'$. Составим таблицы истинности формул Φ и $\Phi' \leftrightharpoons \Phi_1' \wedge \Phi_2$:

Φ_1	Φ_2	Φ_1'	Φ	Φ'
Л	Л	Л	Л	Л
Л	И	Л	Л	Л
И	Л	И	Л	Л
И	И	И	И	И

Следовательно, $\Phi \equiv \Phi'$.

Аналогичным образом проверяются случаи $\Phi \leftrightharpoons \Phi_1 \vee \Phi_2$, $\Phi \leftrightharpoons \Phi_1 \to \Phi_2$ и $\Phi \leftrightharpoons \neg\Phi_1$. □

§5. Принцип двойственности

Будем говорить, что операция $\wedge$ *двойственна* операции $\vee$, и наоборот.

Определение. Пусть Φ — формула АВ, не содержащая импликаций. Формула Ψ называется *двойственной* к формуле Φ (обозначение: Φ^*), если Ψ получается из Φ заменой операций $\wedge$ и $\vee$ на двойственные к ним.

Например, формула $X \vee \neg(Y \wedge Z)$ двойственна к формуле $X \wedge \neg(Y \vee Z)$.

Теорема 3. *Пусть* $\Phi(X_1, \ldots, X_n)$ *— формула АВ, не содержащая импликаций. Тогда*

$$\Phi(X_1, \ldots, X_n) \equiv \neg\Phi^*(\neg X_1, \ldots, \neg X_n).$$

Доказательство. Навесив на формулу $\Phi(X_1, \ldots, X_n)$ двойное отрицание и пронеся одно из них по законам де Моргана до логических переменных (см. теорему 1), мы получим формулу $\neg\Phi^*(\neg X_1, \ldots, \neg X_n)$. $\square$

Следствие (принцип двойственности). $\Phi \equiv \Psi \Longrightarrow \Phi^* \equiv \Psi^*$.

Доказательство. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — логические переменные, от которых зависят формулы Φ и Ψ. Тогда

$$\Phi(X_1, \ldots, X_n) \equiv \Psi(X_1, \ldots, X_n) \Leftrightarrow \neg\Phi^*(\neg X_1, \ldots, \neg X_n) \equiv \neg\Psi^*(\neg X_1, \ldots, \neg X_n) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Phi^*(\neg X_1, \ldots, \neg X_n) \equiv \Psi^*(\neg X_1, \ldots, \neg X_n) \Leftrightarrow \Phi^*(X_1, \ldots, X_n) \equiv \Psi^*(X_1, \ldots, X_n).$$

Обоснование каждого перехода предоставляется читателю в качестве упражнения. $\square$

Принцип двойственности позволяет доказывать некоторые равносильности, переходя к известным равносильностям относительно двойственных формул. Например, зная один закон дистрибутивности, можно получить второй закон дистрибутивности без непосредственной проверки.

§6. Нормальные формы

Заметим, что по законам идемпотентности любую формулу Φ можно рассматривать и как конъюнкцию $\Phi \wedge \Phi$, и как дизъюнкцию $\Phi \vee \Phi$.

Определение. *Элементарной дизъюнкцией* называется дизъюнкция логических переменных и отрицаний логических переменных. *Элементарной конъюнкцией* называется конъюнкция логических переменных и отрицаний логических переменных.

Примеры:

$A \vee B$ — элементарная дизъюнкция,

$A \vee \neg B \vee C$ — элементарная дизъюнкция,

$\neg A \wedge B \wedge C \wedge \neg D$ — элементарная конъюнкция,

A — и элементарная дизъюнкция, и элементарная конъюнкция,

$A \vee (B \wedge \neg C)$ — не элементарная дизъюнкция и не элементарная конъюнкция.

Определение. *Дизъюнктивной нормальной формой* (*ДНФ*) формулы Φ называется дизъюнкция элементарных конъюнкций Ψ такая, что $\Phi \equiv \Psi$. *Конъюнктивной нормальной формой* (*КНФ*) формулы Φ называется конъюнкция элементарных дизъюнкций Ψ такая, что $\Phi \equiv \Psi$.

Приведём примеры формул, находящихся в ДНФ или КНФ:
$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) \vee (A \wedge B \wedge C)$ — ДНФ,
$(A \vee B) \wedge (B \vee \neg C)$ — КНФ,
$A \vee B \vee \neg C$ — и ДНФ, и КНФ,
$A \vee \neg (B \wedge \neg C \wedge A)$ — не ДНФ и не КНФ.

Теорема 4. *Для любой формулы АВ существует ДНФ (КНФ).*

Доказательство (алгоритм построения ДНФ (КНФ)).

Пусть Φ — формула АВ. Используя лемму о замене, теоремы 1 и 2, найдём ДНФ (КНФ) формулы Φ.

1. Избавимся от импликации:

$$\Theta_1 \to \Theta_2 \equiv \neg\Theta_1 \vee \Theta_2.$$

2. Внесём отрицание в скобки и избавимся от двойного отрицания, используя законы де Моргана и закон двойного отрицания:

$$\neg (\Theta_1 \vee \Theta_2) \equiv \neg\Theta_1 \wedge \neg\Theta_2,$$

$$\neg (\Theta_1 \wedge \Theta_2) \equiv \neg\Theta_1 \vee \neg\Theta_2,$$

$$\neg\neg\Theta \equiv \Theta.$$

3. Раскроем скобки, используя законы дистрибутивности и законы поглощения:

$$\Theta_1 \wedge (\Theta_2 \vee \Theta_3) \equiv (\Theta_1 \wedge \Theta_2) \vee (\Theta_1 \wedge \Theta_3),$$

$$\Theta_1 \vee (\Theta_2 \wedge \Theta_3) \equiv (\Theta_1 \vee \Theta_2) \wedge (\Theta_1 \vee \Theta_3),$$

$$\Theta_1 \wedge (\Theta_1 \vee \Theta_2) \equiv \Theta_1,$$

$$\Theta_1 \vee (\Theta_1 \wedge \Theta_2) \equiv \Theta_1.$$

4. Используя законы идемпотентности и теорему 2, избавимся от «лишних» формул. □

Приведём к ДНФ и КНФ формулу $(\neg(A \to B) \to \neg C) \to A \wedge \neg C$:

$$(\neg(A \to B) \to \neg C) \to A \wedge \neg C \equiv$$

$$\equiv (\neg(\neg A \vee B) \to \neg C) \to A \wedge \neg C \equiv$$
$$\equiv \neg\neg(\neg A \vee B) \vee \neg C \to A \wedge \neg C \equiv$$
$$\equiv \neg(\neg\neg(\neg A \vee B) \vee \neg C) \vee (A \wedge \neg C) \equiv$$
$$\equiv \neg(\neg A \vee B \vee \neg C) \vee (A \wedge \neg C) \equiv$$
$$\equiv (\neg\neg A \wedge \neg B \wedge \neg\neg C) \vee (A \wedge \neg C) \equiv$$
$$\equiv (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge \neg C).$$

Получили ДНФ. Продолжим преобразования над полученной ДНФ:

$$(A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge \neg C) \equiv$$

$$\equiv ((A \wedge \neg B \wedge C) \vee A) \wedge ((A \wedge \neg B \wedge C) \vee \neg C) \equiv$$
$$\equiv A \wedge ((A \wedge \neg B \wedge C) \vee \neg C) \equiv$$
$$\equiv A \wedge ((A \vee \neg C) \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge (C \vee \neg C)) \equiv$$
$$\equiv A \wedge (A \vee \neg C) \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge \mathcal{T} \equiv$$
$$\equiv A \wedge (\neg B \vee \neg C).$$

Получили КНФ.

Очевидно, порядок преобразований может быть произвольным. Например, можно сначала воспользоваться законом поглощения, а потом избавиться от импликации. Также можно делать сразу несколько преобразований одновременно. Главное — не запутаться в скобках ☺.

Определение. *Совершенной ДНФ* (*СДНФ*) формулы $\Phi(X_1, \ldots, X_n)$ называется ДНФ Ψ, удовлетворяющая следующим условиям:

— в Ψ нет двух одинаковых элементарных конъюнкций,

— ни одна элементарная конъюнкция в Ψ не содержит одинаковых переменных и отрицаний одинаковых переменных,

— ни одна элементарная конъюнкция в Ψ не содержит переменную вместе с её отрицанием,

— каждая элементарная конъюнкция в Ψ содержит либо X_i, либо $\neg X_i$ для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Теорема 5. *Для любой выполнимой формулы АВ существует СДНФ.*

Доказательство (алгоритм построения СДНФ).

Пусть Φ — выполнимая формула АВ. Согласно теореме 4 существует ДНФ Ψ формулы Φ.

1. Используя законы идемпотентности, избавимся в Ψ от одинаковых элементарных конъюнкций. Полученную формулу обозначим через Ψ'. Формула Ψ' удовлетворяет первому условию определения СДНФ.

2. Используя законы идемпотентности, избавимся от одинаковых переменных и от одинаковых отрицаний переменных в каждой из элементарной конъюнкции Ψ'. Полученную формулу обозначим через Ψ''. Формула Ψ'' удовлетворяет первым двум условиям определения СДНФ.

3. Используя теорему 2, избавимся от элементарных конъюнкций Ψ'', которые содержат как переменную X_i, так и её отрицание $\neg X_i$. Полученную формулу обозначим через Ψ'''. Формула Ψ''' удовлетворяет первым трём условиям определения СДНФ.

4. Если в какой-то элементарной конъюнкции формулы Ψ''' отсутствует переменная X_i для некоторого $i \in \{1, \ldots, n\}$, добавим к ней через конъюнкцию тождественно истинную формулу $X_i \vee \neg X_i$. Значение конъюнкции и всей формулы при этом не изменится ни для какого набора значений переменных. Применим к этой элементарной конъюнкции закон дистрибутивности, разбив её на две элементарные конъюнкции, одна из которых содержит X_i, а другая — $\neg X_i$. Принимая за Ψ полученную формулу, вновь проделаем шаги 1–4.

Если такой элементарной конъюнкции нет, то формула Ψ''' находится в СДНФ. Алгоритм закончен. $\square$

Продолжим предыдущий пример и приведём формулу к СДНФ:

$$(\neg (A \to B) \to \neg C) \to A \wedge \neg C \equiv$$
$$\equiv (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge \neg C) \equiv$$
$$\equiv (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge (B \vee \neg B) \wedge \neg C) \equiv$$
$$\equiv (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \,.$$

Аналогичным образом определяется СКНФ.

Определение. *Совершенной КНФ (СКНФ)* формулы $\Phi(X_1, \ldots, X_n)$ называется КНФ Ψ, удовлетворяющая следующим условиям:

— в Ψ нет двух одинаковых элементарных дизъюнкций,

— ни одна элементарная дизъюнкция в Ψ не содержит одинаковых переменных и отрицаний одинаковых переменных,

— ни одна элементарная дизъюнкция в Ψ не содержит переменную вместе с её отрицанием,

— каждая элементарная дизъюнкция в Ψ содержит либо X_i, либо $\neg X_i$ для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Теорема 6. *Для любой опровержимой формулы АВ существует СКНФ.*

Доказательство (алгоритм построения СКНФ).
Аналогично доказательству теоремы 5 и предоставляется читателю в качестве упражнения. □

Вернёмся к примеру. Построим СКНФ формулы, используя уже найденную КНФ:

$$(\neg(A \to B) \to \neg C) \to A \wedge \neg C \equiv$$
$$\equiv A \wedge (\neg B \vee \neg C) \equiv$$
$$\equiv (A \vee (B \wedge \neg B) \vee (C \wedge \neg C)) \wedge ((A \wedge \neg A) \vee \neg B \vee \neg C) \equiv$$
$$\equiv (A \vee B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee C) \wedge (A \vee B \vee \neg C) \wedge$$
$$\wedge (A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \equiv$$
$$\equiv (A \vee B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee C) \wedge (A \vee B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C).$$

§7. Логическое следствие в АВ

Определение. Формула $\Phi(X_1, \ldots, X_n)$ называется *логическим следствием* формул $\Psi_1(X_1, \ldots, X_n)$, ..., $\Psi_k(X_1, \ldots, X_n)$, если для любого набора значений логических переменных $\bar{\varepsilon} = \langle \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \rangle \in \{\text{И}, \text{Л}\}^n$

$$\Psi_1(\bar{\varepsilon}) = \text{И}, \ \ldots, \ \Psi_k(\bar{\varepsilon}) = \text{И} \Longrightarrow \Phi(\bar{\varepsilon}) = \text{И}.$$

Формулы $\Psi_1, \ldots, \Psi_k$ называются *гипотезами*.

Если формула Φ является логическим следствием формул $\Psi_1, \ldots, \Psi_k$, то будем писать $\Psi_1, \ldots, \Psi_k \vDash \Phi$.

Покажем, что $A, \ A \to B, \ B \to C \vDash C$. Предположим, что A, $A \to B$ и $B \to C$ принимают значение И. Так как $A = \text{И}$ и $A \to B = \text{И}$, то по определению импликации $B = \text{И}$. Аналогично получаем, что $C = \text{И}$.

Определение. Множество формул $\{\Psi_1, \ldots, \Psi_k\}$ называется *противоречивым*, если $\Psi_1 \wedge \ldots \wedge \Psi_k \equiv \mathcal{F}$.

Если множество $\{\Psi_1, \ldots, \Psi_k\}$ противоречиво, то будем писать $\Psi_1, \ldots, \Psi_k \vDash$. Если Φ — тавтология, то будем писать $\vDash \Phi$.

Упражнение 3. Объясните, почему символ $\vDash$, который мы используем для обозначения логического следствия, уместно использовать для записи тавтологий и противоречивых множеств формул.

Теорема 7. *Пусть* $\Psi_1, \ldots, \Psi_k, \Phi$ — *формулы АВ. Следующие условия эквивалентны:*

1. $\Psi_1, \ldots, \Psi_k \models \Phi$.
2. $\Psi_1, \ldots, \Psi_{k-1} \models \Psi_k \to \Phi$.
3. $\models \Psi_1 \to (\Psi_2 \to (\ldots \to (\Psi_k \to \Phi)\ldots))$.
4. $\Psi_1 \wedge \ldots \wedge \Psi_k \models \Phi$.
5. $\models \Psi_1 \wedge \ldots \wedge \Psi_k \to \Phi$.
6. $\Psi_1, \ldots, \Psi_k, \neg\Phi \models$.
7. $\Psi_1 \wedge \ldots \wedge \Psi_k \wedge \neg\Phi \models$.

Доказательство.

Докажем 1 $\Rightarrow$ 3. Предположим, что существует такой набор значений переменных, входящих в формулу

$$\Psi_1 \to (\Psi_2 \to (\ldots \to (\Psi_k \to \Phi)\ldots)),$$

при котором она принимает значение Л. По определению импликация ложна только в том случае, когда посылка истинна, а заключение ложно. Следовательно, на этом наборе значений

$$\Psi_1 = \text{И и } \Psi_2 \to (\ldots \to (\Psi_k \to \Phi)\ldots) = \text{Л}.$$

Аналогично получаем, что

$$\Psi_2 = \text{И и } \Psi_3 \to (\ldots \to (\Psi_k \to \Phi)\ldots) = \text{Л}.$$

Продолжая процесс до конца, получим, что на этом наборе значений

$$\Psi_1 = \ldots = \Psi_k = \text{И и } \Phi = \text{Л},$$

что противоречит условию $\Psi_1, \ldots, \Psi_k \models \Phi$. Значит, наше предположение неверно и $\Psi_1 \to (\Psi_2 \to (\ldots \to (\Psi_k \to \Phi)\ldots))$ — тождественно истинная формула.

Докажем 4 $\Rightarrow$ 6. Предположим, что существует такой набор значений переменных, входящих в формулу $\Psi_1 \wedge \ldots \wedge \Psi_k \wedge \neg\Phi$, при котором она принимает значение И. Тогда $\Psi_1 = \ldots = \Psi_k = \neg\Phi = \text{И}$ на этом наборе. Следовательно, на этом наборе $\Psi_1 = \ldots = \Psi_k = \text{И}$ и $\Phi = \text{Л}$, что противоречит условию $\Psi_1 \wedge \ldots \wedge \Psi_k \models \Phi$. Значит, наше предположение неверно и $\Psi_1 \wedge \ldots \wedge \Psi_k \wedge \neg\Phi \equiv \mathcal{F}$, т.е. $\Psi_1, \ldots, \Psi_k, \neg\Phi \models$. $\square$

Домашнее задание. Докажите теорему 7.

Выясним, верно ли

$$\urcorner X \vee \urcorner Y,\ Y \vee \urcorner Z,\ Z \to U,\ \urcorner U \wedge X \to Y \vDash Z \vee X.$$

Воспользуемся эквивалентностью условий 1 и 7 теоремы 7.

$$(\urcorner X \vee \urcorner Y) \wedge (Y \vee \urcorner Z) \wedge (Z \to U) \wedge (\urcorner U \wedge X \to Y) \wedge \urcorner (Z \vee X) \equiv$$
$$\equiv \underline{(\urcorner X \vee \urcorner Y)} \wedge \underline{\underline{(Y \vee \urcorner Z)}} \wedge \underline{\underline{(\urcorner Z \vee U)}} \wedge \underline{(U \vee \urcorner X \vee Y)} \wedge \underline{\underline{\urcorner Z}} \wedge \underline{\urcorner X} \equiv$$
$$\equiv \urcorner Z \wedge \urcorner X \not\equiv \mathcal{F}.$$

Следовательно,

$$\urcorner X \vee \urcorner Y,\ Y \vee \urcorner Z,\ Z \to U,\ \urcorner U \wedge X \to Y \nvDash Z \vee X.$$

§8. Понятие резолютивного вывода

Определение. Пусть $\Phi \leftrightharpoons X \vee \Theta_1$, $\Psi \leftrightharpoons \urcorner X \vee \Theta_2$, где X — логическая переменная, Θ_1, Θ_2 — элементарные дизъюнкции. *Резольвентой* формул Φ и Ψ (обозначение: $\mathrm{res}_X(\Phi, \Psi)$) называется дизъюнкция $\Theta_1 \vee \Theta_2$.

Замечание. Вообще говоря, Θ_1 или (и) Θ_2 в формулах Φ и Ψ могут отсутствовать. В этом случае в определении резольвенты отсутствует Θ_1 или (и) Θ_2 соответственно. В случае, когда $\Phi \leftrightharpoons X$ и $\Psi \leftrightharpoons \urcorner X$, под резольвентой формул Φ и Ψ будем понимать тождественно ложную формулу, которую будем обозначать через $\varnothing$ и называть *пустым дизъюнктом*.

Рассмотрим пример. Пусть $\Phi \leftrightharpoons X \vee \urcorner Y \vee Z$, $\Psi \leftrightharpoons X \vee Y \vee U$. Согласно определению, для формул Φ и Ψ мы не можем найти резольвенту, так как у них в начале стоит одна и та же переменная X (в определении резольвенты формулы должны начинаться с X и $\urcorner X$). Но что мешает переместить нужные нам Y и $\urcorner Y$ в начало формул Φ и Ψ? В этом случае мы получим формулы, которые имеют уже другой вид, отличный от вида формул Φ и Ψ, но равносильные им. В дальнейшем мы не будем задаваться подобными вопросами и проводить аналогичные рассуждения, а сразу будем работать с равносильными данным формулами. Тогда

$$\mathrm{res}_Y(\Phi, \Psi) \leftrightharpoons X \vee Z \vee X \vee U \equiv X \vee Z \vee U.$$

Лемма (правило резолюций). *Пусть $\Phi \leftrightharpoons X \vee \Theta_1$, $\Psi \leftrightharpoons \urcorner X \vee \Theta_2$, где X — логическая переменная, Θ_1, Θ_2 — элементарные дизъюнкции. Тогда*

$$\Phi, \Psi \vDash res_X(\Phi, \Psi).$$

Доказательство.
Рассмотрим конъюнкцию Φ, Ψ и $\neg\,\mathrm{res}_X(\Phi,\Psi)$:

$$(X \vee \Theta_1) \wedge (\neg X \vee \Theta_2) \wedge \neg(\Theta_1 \vee \Theta_2) \equiv$$

$$\equiv (X \vee \Theta_1) \wedge (\neg X \vee \Theta_2) \wedge \neg\Theta_1 \wedge \neg\Theta_2 \equiv$$
$$\equiv ((X \vee \Theta_1) \wedge \neg\Theta_1) \wedge ((\neg X \vee \Theta_2) \wedge \neg\Theta_2) \equiv$$
$$\equiv ((X \wedge \neg\Theta_1) \vee (\Theta_1 \wedge \neg\Theta_1)) \wedge ((\neg X \wedge \neg\Theta_2) \vee (\Theta_2 \wedge \neg\Theta_2)) \equiv$$
$$\equiv X \wedge \neg\Theta_1 \wedge \neg X \wedge \neg\Theta_2 \equiv \mathcal{F}.$$

Следовательно, по теореме 7 ($7 \Rightarrow 1$) $\Phi, \Psi \vDash \mathrm{res}_X(\Phi,\Psi)$. □

Определение. Последовательность формул $\Psi_1, \ldots, \Psi_m$ называется *резолютивным выводом* формулы Φ из множества $\{\Phi_1, \ldots, \Phi_n\}$ элементарных дизъюнкций, если $\Phi \leftrightharpoons \Psi_m$ и для любого $i \in \{1, \ldots, m\}$ верно хотя бы одно из следующих условий:

— $\Psi_i \in \{\Phi_1, \ldots, \Phi_n\}$;

— $\Psi_i \leftrightharpoons \mathrm{res}_X(\Psi_j, \Psi_k)$ для некоторых $j, k < i$.

Например, пусть

$$\begin{aligned}
&\Phi_1 \leftrightharpoons X \vee \neg Y \vee Z,\\
&\Phi_2 \leftrightharpoons \neg X \vee \neg Y,\\
&\Phi_3 \leftrightharpoons Y \vee Z,\\
&\Phi_4 \leftrightharpoons \neg Z.
\end{aligned}$$

Построим резолютивный вывод Z из множества формул $\{\Phi_1,\ \Phi_2,\ \Phi_3,\ \Phi_4\}$:

$$\begin{aligned}
&\Psi_1 \leftrightharpoons \Phi_1 \leftrightharpoons X \vee \neg Y \vee Z,\\
&\Psi_2 \leftrightharpoons \Phi_2 \leftrightharpoons \neg X \vee \neg Y,\\
&\Psi_3 \leftrightharpoons \mathrm{res}_X(\Psi_1, \Psi_2) \leftrightharpoons \neg Y \vee Z,\\
&\Psi_4 \leftrightharpoons \Phi_4 \leftrightharpoons \neg Z,\\
&\Psi_5 \leftrightharpoons \mathrm{res}_Z(\Psi_3, \Psi_4) \leftrightharpoons \neg Y,\\
&\Psi_6 \leftrightharpoons \Phi_3 \leftrightharpoons Y \vee Z,\\
&\Psi_7 \leftrightharpoons \mathrm{res}_Y(\Psi_5, \Psi_6) \leftrightharpoons Z.
\end{aligned}$$

$\Psi_1,\ \ldots,\ \Psi_7$ — резолютивный вывод Z из множества $\{\Phi_1,\ \Phi_2,\ \Phi_3,\ \Phi_4\}$.

§9. Метод резолюций в АВ

Вопрос о том, является ли формула логическим следствием множества формул, не всегда решается достаточно просто. Можно воспользоваться определением и построить таблицу истинности для каждой формулы. Но в случае, когда количество переменных, входящих в эти формулы, или самих формул велико, построение таблиц истинности может занять много времени. Аналогичная проблема возникает и с применением теоремы 7. Естественно, логиками были разработаны различные приёмы, чтобы упростить поиск ответа на поставленный вопрос. Одним из таких приёмов является метод резолюций. В основе этого метода лежит правило резолюций, которое мы доказали в предыдущем параграфе. Прежде чем сформулировать алгоритм, докажем следующую теорему.

Теорема 8 (о полноте метода резолюций в АВ). *Множество элементарных дизъюнкций противоречиво тогда и только тогда, когда существует резолютивный вывод* $\varnothing$ *из этого множества.*

Доказательство.

Необходимость. Пусть

$$S = \{\Phi_1, \ldots, \Phi_n\}$$

— противоречивое множество элементарных дизъюнкций,

$$S_1 = S \setminus \{\Phi \in S \mid \Phi \equiv \mathcal{T}\}.$$

Тогда S_1 противоречиво (почему?). Очевидно, что $S_1 \subseteq S$. Обозначим через $X_1, \ldots, X_k$ все переменные, входящие в формулы из S_1. Рассмотрим несколько случаев относительно переменной X_1.

Случай 1. X_1 не входит ни в одну из формул множества S_1 с отрицанием. Пусть

$$S_2 = S_1 \setminus \{\Phi \in S_1 \mid X_1 \text{ входит в } \Phi\}.$$

S_2 — противоречивое множество формул (почему?), $S_2 \subseteq S_1$.

Случай 2. X_1 не входит ни в одну из формул множества S_1 без отрицания. Пусть

$$S_2 = S_1 \setminus \{\Phi \in S_1 \mid \neg X_1 \text{ входит в } \Phi\}.$$

S_2 — противоречивое множество формул (почему?), $S_2 \subseteq S_1$.

Случай 3. В S_1 найдутся формулы, содержащие X_1 без отрицания, и формулы, содержащие $\neg X_1$. Пусть

$$S_2 = (S_1 \setminus \{\Phi \in S_1 \mid X_1 \text{ или } \neg X_1 \text{ входит в } \Phi\}) \cup \{\mathrm{res}_{X_1}(\Psi, \Theta) \mid \Psi, \Theta \in S_1\}.$$

Покажем, что S_2 — противоречивое множество формул. Так как S_1 — противоречивое множество, то

$$\bigwedge_{\Phi \in S_1} \Phi(\bar{\varepsilon}) = \text{Л}$$

для любого $\bar{\varepsilon} \in \{\text{И, Л}\}^k$. Следовательно,

$$\bigwedge_{\Phi \in S_1 \cap S_2} \Phi(\bar{\varepsilon}') \wedge \bigwedge_{\Phi \in S_1 \setminus S_2} \Phi(\bar{\varepsilon}) = \text{Л}$$

для любого $\bar{\varepsilon} = \langle \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k \rangle \in \{\text{И, Л}\}^k$, $\bar{\varepsilon}' = \langle \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k \rangle$.

1) Если

$$\bigwedge_{\Phi \in S_1 \cap S_2} \Phi(\bar{\varepsilon}') = \text{Л}$$

для любого $\bar{\varepsilon}' \in \{\text{И, Л}\}^{k-1}$, то

$$\bigwedge_{\Phi \in S_2} \Phi(\bar{\varepsilon}') = \text{Л}$$

для любого $\bar{\varepsilon}' \in \{\text{И, Л}\}^{k-1}$ и S_2 — противоречиво.

2) Пусть

$$\bigwedge_{\Phi \in S_1 \cap S_2} \Phi(\bar{\varepsilon}') = \text{И}$$

для некоторого $\bar{\varepsilon}' = \langle \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k \rangle \in \{\text{И, Л}\}^{k-1}$. Тогда для любого $\varepsilon_1 \in \{\text{И, Л}\}$

$$\bigwedge_{\Phi \in S_1 \setminus S_2} \Phi(\bar{\varepsilon}) = \text{Л},$$

где $\bar{\varepsilon} = \langle \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k \rangle$.

- Пусть $\varepsilon_1 = \text{И}$. Тогда

$$\bigwedge_{\substack{\Phi \in S_1 \setminus S_2 \\ \Phi \text{ содержит } \neg X_1}} \Phi(\bar{\varepsilon}) = \text{Л},$$

где $\bar{\varepsilon} = \langle \text{И}, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k \rangle$. Следовательно, существует формула

$$\Phi \leftrightharpoons \neg X_1 \vee \Phi'(X_2, \ldots, X_n) \in S_1 \setminus S_2,$$

причём $\Phi'(\bar{\varepsilon}') = \text{Л}$.

- Пусть $\varepsilon_1 = \text{Л}$. Тогда аналогично существует формула

$$\Psi \leftrightharpoons X_1 \vee \Psi'(X_2, \ldots, X_n) \in S_1 \setminus S_2,$$

причём $\Psi'(\bar{\varepsilon}') = \text{Л}$.

По построению множества S_2, формула

$$\Theta \leftrightharpoons \mathrm{res}_{X_1}(\Phi, \Psi) \leftrightharpoons \Phi' \vee \Psi'$$

принадлежит S_2. Так как

$$\Theta(\bar{\varepsilon}') = \Phi'(\bar{\varepsilon}') \vee \Psi'(\bar{\varepsilon}') = \text{Л},$$

то

$$\bigwedge_{\Phi \in S_2} \Phi(\bar{\varepsilon}') = \text{Л}$$

для любого $\bar{\varepsilon}' \in \{\text{И, Л}\}^{k-1}$ и S_2 — противоречиво.

Таким образом, в каждом из случаев 1–3 мы получили противоречивое множество S_2, все формулы которого не содержат ни X_1, ни $\neg X_1$. Применив к новому множеству S_2 ту же процедуру относительно переменной X_2, мы получим противоречивое множество S_3, все формулы которого не содержат X_1, $\neg X_1$, X_2 и $\neg X_2$. Продолжая аналогичные действия, мы получим множество S_k, все формулы которого не зависят ни от одной из переменных $X_1, \ldots, X_k$, т.е. $S_k = \{\varnothing\}$. Очевидно, последовательность формул

$$S_1,\ S_2 \setminus S_1,\ S_3 \setminus (S_1 \cup S_2),\ \ldots,\ S_{k-1} \setminus \bigcup_{i<k-1} S_i$$

является резолютивным выводом $\varnothing$ из множества S.

Достаточность. Пусть $\Psi_1, \ldots, \Psi_m$ — резолютивный вывод формулы Ψ_m из множества элементарных дизъюнкций $\{\Phi_1, \ldots, \Phi_n\}$, $\Psi_m \leftrightharpoons \varnothing$. Индукцией по i покажем, что $\Phi_1, \ldots, \Phi_n \models \Psi_i$.

1. По определению резолютивного вывода $\Psi_1 \in \{\Phi_1, \ldots, \Phi_n\}$. Следовательно, $\Phi_1, \ldots, \Phi_n \models \Psi_1$, то есть утверждение верно при $i = 1$.

2. Предположим, что утверждение верно для всех $j < i$.

1) Если $\Psi_i \in \{\Phi_1, \ldots, \Phi_n\}$, то $\Phi_1, \ldots, \Phi_n \models \Psi_i$.

2) Если $\Psi_i \leftrightharpoons \operatorname{res}(\Psi_j, \Psi_k)$ для некоторых $j, k < i$, то по предположению индукции $\Phi_1, \ldots, \Phi_n \models \Psi_j$ и $\Phi_1, \ldots, \Phi_n \models \Psi_k$. Согласно правилу резолюций $\Psi_j, \Psi_k \models \Psi_i$. Следовательно, $\Phi_1, \ldots, \Phi_n \models \Psi_i$.

Таким образом, $\Phi_1, \ldots, \Phi_n \models \Psi_i$ для любого $i \leqslant m$.

Если $\Psi_m \in \{\Phi_1, \ldots, \Phi_n\}$, то $\{\Phi_1, \ldots, \Phi_n\}$ — противоречивое множество. Предположим, что $\Psi_m \notin \{\Phi_1, \ldots, \Phi_n\}$. Тогда $\Psi_m \leftrightharpoons \operatorname{res}_X(\Psi_j, \Psi_k)$ для некоторых $j, k < m$ и переменной X. Следовательно, $\Psi_j \leftrightharpoons X$ и $\Psi_k \leftrightharpoons \neg X$. По доказанному ранее, $\Phi_1, \ldots, \Phi_n \models X$ и $\Phi_1, \ldots, \Phi_n \models \neg X$. Следовательно, $\{\Phi_1, \ldots, \Phi_n\}$ — противоречивое множество. $\square$

Согласно определению резолютивного вывода мы не можем работать с произвольными формулами $\Phi_1, \ldots, \Phi_n, \Psi$, так как резольвенты определены только для элементарных дизъюнкций. Поэтому мы должны «подготовить» формулы

$\Phi_1, \ldots, \Phi_n, \Psi$ для дальнейшей работы. В основе метода резолюций лежит следующая схема рассуждений:

$$\Phi_1, \ldots, \Phi_n \models \Psi \Longleftrightarrow \Phi_1 \wedge \ldots \wedge \Phi_n \wedge \urcorner\Psi \models \Longleftrightarrow \Phi_1 \wedge \ldots \wedge \Phi_n \wedge \urcorner\Psi \equiv \mathcal{F} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \text{КНФ}(\Phi_1 \wedge \ldots \wedge \Phi_n \wedge \urcorner\Psi) \equiv \mathcal{F} \Longleftrightarrow \text{КНФ}(\Phi_1 \wedge \ldots \wedge \Phi_n \wedge \urcorner\Psi) \models \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \Theta_1, \ldots, \Theta_k \models \Longleftrightarrow \text{существует резолютивный вывод } \varnothing \text{ из } \{\Theta_1, \ldots, \Theta_k\},$$

где $\Theta_1, \ldots, \Theta_k$ — элементарные дизъюнкции, образующие КНФ$(\Phi_1 \wedge \ldots \wedge \Phi_n \wedge \urcorner\Psi)$.

Упражнение 4. Объясните каждый переход в приведённой выше схеме рассуждений.

Метод резолюций в АВ. Проверим, что $\Phi_1, \ldots, \Phi_n \models \Psi$.

1. Перекинем формулу Ψ за знак логического следствия влево. Таким образом мы свели задачу к проверке того, что $\Phi_1, \ldots, \Phi_n, \urcorner\Psi \models$.

2. Приведём каждую из формул $\Phi_1, \ldots, \Phi_n, \urcorner\Psi$ к КНФ.

3. Разобьём каждую из полученных КНФ на элементарные дизъюнкции.

4. Попробуем построить резолютивный вывод $\varnothing$ из полученного множества элементарных дизъюнкций. Если его удалось построить, то $\Phi_1, \ldots, \Phi_n \models \Psi$. В противном случае мы не можем быть уверенными в том, что $\Phi_1, \ldots, \Phi_n \not\models \Psi$ (возможно, мы не видим, какие формулы нужно «склеивать»). Для того, чтобы повысить нашу уверенность в этой ситуации, используют различные методы, с одним из которых можно познакомиться в следующем параграфе.

Рассмотрим пример. Решим задачу с помощью метода резолюций.

На складе совершено хищение. Подозрение пало на троих человек: Брауна, Джонсона и Смита. Они были доставлены для допроса, в результате которого было установлено следующее:

1) Никто, кроме Джонсона, Брауна и Смита, не был замешан в деле.

2) Браун никогда не ходит на дело без, по крайней мере, одного соучастника.

3) Смит не виновен.

Виновен ли Джонсон?

Для того чтобы решить эту задачу средствами алгебры высказываний, каждое из данных высказываний необходимо перевести на язык математической логики (иногда говорят *формализовать*). Введём обозначения для элементарных высказываний:

D — виновен Джонсон,

B — виновен Браун,

S — виновен Смит.

Тогда установленные в результате допроса факты можно формализовать следующим образом:

$\Phi_1 \leftrightharpoons D \vee B \vee S$,

$\Phi_2 \leftrightharpoons B \to D \vee S$,
$\Phi_3 \leftrightharpoons \neg S$.
Выясним, верно ли, что

$$D \vee B \vee S,\ B \to D \vee S,\ \neg S\ \vDash\ D.$$

1. Сведём задачу к проверке того, что

$$D \vee B \vee S,\ B \to D \vee S,\ \neg S,\ \neg D\ \vDash .$$

2. Приведём каждую из рассматриваемых формул к КНФ:

$$D \vee B \vee S,\ \neg B \vee D \vee S,\ \neg S,\ \neg D\ \vDash .$$

3. Каждая из записанных формул является элементарной дизъюнкцией. Можем искать резолютивный вывод $\varnothing$.

4. Строим резолютивный вывод:
$\Psi_1 \leftrightharpoons D \vee B \vee S$,
$\Psi_2 \leftrightharpoons \neg B \vee D \vee S$,
$\Psi_3 \leftrightharpoons \neg S$,
$\Psi_4 \leftrightharpoons \neg D$,
$\Psi_5 \leftrightharpoons \mathrm{res}_B(\Psi_1, \Psi_2) \equiv D \vee S$,
$\Psi_6 \leftrightharpoons \mathrm{res}_S(\Psi_3, \Psi_5) \leftrightharpoons D$,
$\Psi_7 \leftrightharpoons \mathrm{res}_D(\Psi_4, \Psi_6) \leftrightharpoons \varnothing$.

Следовательно, Джонсон виновен. *А виновен ли Браун?*

Как Вы наверняка заметили, метод резолюций позволяет решить вопрос о логическом следствии формул без проверки истинности формул, то есть без построения таблиц истинности. Следовательно, этот метод более удобен для программирования подобных задач на ЭВМ, так как занимает меньше памяти и времени.

§10. Стратегия вычёркивания

В предыдущем параграфе мы доказали универсальность метода резолюций для решения задачи о логическом следствии формул. Очевидно, этот метод можно применять для решения задачи о противоречивости множества формул. Метод резолюций более эффективен многих других методов. Однако неограниченное применение правила резолюций может вызвать порождение огромного количества не относящихся к делу дизъюнкций. Например, уже полученных ранее формул, тождественно истинных формул, формул, которые потом нельзя будет склеить с другими с целью уменьшения количества входящих в них переменных. *Стратегия вычёркивания* основана на трёх правилах, которые мы неосознанно сформулировали при доказательстве теоремы о полноте метода резолюций (необходимость).

Правило 1. Пусть S — множество элементарных дизъюнкций, S' получается из S вычёркиванием всех тождественно истинных формул.

1) Если $S' = \varnothing$, то S непротиворечиво.

2) Если $S' \neq \varnothing$, то S противоречиво тогда и только тогда, когда S' противоречиво.

Правило 2. Пусть S — множество элементарных дизъюнкций, переменная X не входит ни в одну из формул множества S с отрицанием, S' получается из S вычёркиванием всех формул, содержащих X.

1) Если $S' = \varnothing$, то S непротиворечиво.

2) Если $S' \neq \varnothing$, то S противоречиво тогда и только тогда, когда S' противоречиво.

Правило 3. Пусть S — множество элементарных дизъюнкций, переменная X не входит ни в одну из формул множества S без отрицания, S' получается из S вычёркиванием всех формул, содержащих $\neg X$.

1) Если $S' = \varnothing$, то S непротиворечиво.

2) Если $S' \neq \varnothing$, то S противоречиво тогда и только тогда, когда S' противоречиво.

Вернёмся к примеру из §7. Проверим, верно ли

$$\neg X \vee \neg Y,\ Y \vee \neg Z,\ Z \to U,\ \neg U \wedge X \to Y \models Z \vee X,$$

с помощью метода резолюций.

1. $\neg X \vee \neg Y,\ Y \vee \neg Z,\ Z \to U,\ \neg U \wedge X \to Y,\ \neg(Z \vee X) \models ?$
2. $\neg X \vee \neg Y,\ Y \vee \neg Z,\ \neg Z \vee U,\ U \vee \neg X \vee Y,\ \neg Z \wedge \neg X \models ?$
3. $\neg X \vee \neg Y,\ Y \vee \neg Z,\ \neg Z \vee U,\ U \vee \neg X \vee Y,\ \neg Z,\ \neg X \models ?$
4. Запишем полученные формулы списком:

$\Psi_1 \leftrightharpoons \neg X \vee \neg Y$,

$\Psi_2 \leftrightharpoons Y \vee \neg Z$,

$\Psi_3 \leftrightharpoons \neg Z \vee U$,

$\Psi_4 \leftrightharpoons U \vee \neg X \vee Y$,

$\Psi_5 \leftrightharpoons \neg Z$,

$\Psi_6 \leftrightharpoons \neg X$.

Заметим, что ни одна из формул $\Psi_1, \ldots, \Psi_6$ не содержит переменную X без отрицания. Вычеркнем формулы, содержащие $\neg X$:

$\Psi_2 \leftrightharpoons Y \vee \neg Z$,

$\Psi_3 \leftrightharpoons \neg Z \vee U$,

$\Psi_5 \leftrightharpoons \neg Z$.

Так как оставшиеся формулы содержат переменную Z только с отрицанием, то после вычёркивания получим пустое множество формул.

Согласно правилам 2 и 3

$$\neg X \vee \neg Y,\ Y \vee \neg Z,\ Z \to U,\ \neg U \wedge X \to Y,\ \neg(Z \vee X) \nvDash .$$

Следовательно,

$$\neg X \vee \neg Y,\ Y \vee \neg Z,\ Z \to U,\ \neg U \wedge X \to Y \nvDash Z \vee X.$$

Упражнение 5. Проверьте, виновен ли Браун в примере из §9, используя метод резолюций и стратегию вычёркивания.