Ефремов Евгений Леонидович

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Конспект лекций

Владивосток

2021 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА III

ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

§1. Понятие формального исчисления

Определение. Будем говорить, что задано *исчисление* I, если выполняются следующие условия:

I. Имеется некоторое непустое множество символов A, которое мы будем называть *алфавитом* исчисления I.

Конечные последовательности символов алфавита называются *словами* или *выражениями* исчисления I. Обозначим через S множество всех слов исчисления I.

II. Определено множество $F \subseteq S$, элементы которого будем называть *формулами* исчисления I.

III. Определено множество $Ax \subseteq F$, элементы которого будем называть *аксиомами* исчисления I.

IV. Определено множество отношений между формулами R, элементы которого будем называть *правилами вывода* исчисления I.

Например, пусть $A = \{a, b\}$; формулами являются все слова алфавита A, состоящие из более чем одного символа; аксиомами будут формулы, начинающиеся с символа a и состоящие из более чем двух символов; правило вывода ρ определим следующим образом: формула Ψ выводится из множества формул Γ по правилу ρ, если Ψ получается из некоторых $\Phi_1, \Phi_2 \in \Gamma$ приписыванием формулы Φ_2 в конец формулы Φ_1.

Определение. Последовательность формул $\Psi_1, \ldots, \Psi_m \in F$ исчисления I называется *выводом* формулы Φ из множества формул $\{\Phi_1, \ldots, \Phi_n\}$ исчисления I, если $\Psi_m \leftrightharpoons \Phi$ и для любого $i \leqslant m$ выполняется хотя бы одно из следующих условий:

1) $\Psi_i \in \{\Phi_1, \ldots, \Phi_n\}$,

2) $\Psi_i \in Ax$,

3) Ψ_i получается из $\{\Psi_1, \ldots, \Psi_{i-1}\}$ с помощью правила вывода.

Если для формулы Φ исчисления I существует вывод из множества формул $\{\Phi_1, \ldots, \Phi_n\}$ исчисления I, то Φ называется *выводимой из* $\{\Phi_1, \ldots, \Phi_n\}$ *в* I. Формулы $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ при этом называются *гипотезами.* Если множество гипотез пусто, то Φ называется *доказуемой в* I (или *теоремой* I).

Тот факт, что Φ выводима из множества $\{\Phi_1, \ldots, \Phi_n\}$ в исчислении I, будем записывать следующим образом: $\Phi_1, \ldots, \Phi_n \vdash_I \Phi$.

В приведённом выше примере формула $baaba$ выводима из множества $\{ba\}$:
$\Psi_1 \leftrightharpoons ba$,
$\Psi_2 \leftrightharpoons aba$,
$\Psi_3 \leftrightharpoons baaba$.

Вопрос о том, является ли какая-то формула выводимой из множества формул, является центральным вопросом любого исчисления. Именно этому вопросу будут посвящены наши практические занятия по этой теме.

Правила вывода исчисления I схематично будем записывать следующим образом:

$$\frac{\Phi_1,\ \ldots,\ \Phi_n}{\Phi},$$

где $\Phi_1, \ldots, \Phi_n, \Phi$ — формулы исчисления I. Такая запись означает, что с помощью этого правила Φ получается из $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$.

Очевидно, в случае, когда вывод состоит из большого количества формул, понять, откуда какая формула получилась, не всегда просто. Для этого будем записывать вывод формулы, руководствуясь правилами:

1. Не будем «называть» формулы и писать $\Psi_1 \leftrightharpoons \ldots$ Вместо этого будем записывать только формулы в пронумерованный список.

2. Сразу после номера формулы будем записывать в квадратных скобках примечание, указывающее на способ получения этой формулы. Для записи примечаний будем использовать следующие сокращения:

— гип — гипотеза,

— Аn — аксиома с номером n,

— св. n (номера формул) — свойство (сформулированное нами в последующих параграфах утверждение) с номером n, которое применили к формулам с номерами из ( ),

— ПВn — правило вывода с номером n.

3. Согласно определению вывода при использовании правил вывода необходимо учитывать все предыдущие формулы. Однако для получения новой формулы может быть достаточно только несколько из них. Например, правило вывода из предыдущего примера в нашей записи выглядит следующим образом:

для любого множества формул Γ и любых формул Φ_1, Φ_2 исчисления I

$$\frac{\Gamma,\ \Phi_1,\ \Phi_2}{\Phi_1\Phi_2}.$$

Для получения формулы под чертой используются только формулы Φ_1 и Φ_2 над чертой, хотя множество Γ может состоять из большого множества формул. Не смотря на то, что в выводе участвует только часть этих формул, искать нужные Φ_1 и Φ_2 не так просто. Поэтому в комментариях после ПВn в скобках будем указывать номера формул, которые мы используем для получения новой формулы.

4. В случае замен каких-либо элементов аксиом и свойств будем записывать верхним индексом заменяемый элемент, ниже соответствующим нижним индексом — элемент, на который заменяем.

Продемонстрируем указанные замечания на рассмотренном выше примере. Для этого опишем аксиомы и правила вывода более строго.

А1 $\leftrightharpoons a\Phi$ для любой формулы Φ исчисления I. Фактически здесь мы указали не саму аксиому, а только схему. При подстановке вместо Φ любой формулы исчисления I мы получим аксиому исчисления I.

ПВ1: для любого множества формул Γ исчисления I и любых формул Φ_1, Φ_2 исчисления I

$$\frac{\Gamma,\ \Phi_1,\ \Phi_2}{\Phi_1\Phi_2}.$$

Запишем вывод формулы $baaba$ из множества $\{ba\}$, руководствуясь нашими правилами:

1. [гип] ba.
2. [А1]$^{\Phi}_{ba}$ aba.
3. [ПВ1 (1, 2)] $baaba$.

§2. Определение исчисления высказываний

I. *Алфавит ИВ:*

1) прописные буквы латинского алфавита (возможно с индексами), которые будем называть *пропозициональными переменными*: $A, B, C, \ldots, A_1, A_2, \ldots,$

2) *логические связки*: $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow,$

3) (,).

II. *Формулы ИВ* определим индуктивным способом:

1) пропозициональная переменная — формула ИВ,

2) если Φ, Ψ — формулы ИВ, то $(\Phi \wedge \Psi)$, $(\Phi \vee \Psi)$, $(\Phi \rightarrow \Psi)$, $\neg\Phi$ — формулы ИВ.

Формулы исчисления высказываний являются всего лишь последовательностями символов. Они не наделены каким-либо смыслом, не принимают никаких значений. Формулы ИВ не есть формулы АВ, несмотря на их очевидную схожесть. Тем не менее, чтобы не путаться в скобках, будем опускать их так, как мы делали это в формулах АВ. Например, формулу $((A \wedge B) \to C)$ будем записывать как $A \wedge B \to C$.

III. Для любых формул ИВ Φ, Ψ, Θ следующие формулы будем считать *аксиомами ИВ*:

A1. $\Phi \to (\Psi \to \Phi)$.

A2. $\big(\Phi \to \Psi\big) \to \big((\Phi \to (\Psi \to \Theta)) \to (\Phi \to \Theta)\big)$.

A3. $\Phi \wedge \Psi \to \Phi$.

A4. $\Phi \wedge \Psi \to \Psi$.

A5. $\big(\Phi \to \Psi\big) \to \big((\Phi \to \Theta) \to (\Phi \to \Psi \wedge \Theta)\big)$.

A6. $\Phi \to \Phi \vee \Psi$.

A7. $\Psi \to \Phi \vee \Psi$.

A8. $\big(\Phi \to \Theta\big) \to \big((\Psi \to \Theta) \to (\Phi \vee \Psi \to \Theta)\big)$.

A9. $\big(\Phi \to \Psi\big) \to \big((\Phi \to \neg\Psi) \to \neg\Phi\big)$.

A10. $\neg\neg\Phi \to \Phi$.

IV. Единственным *правилом вывода ИВ* является *правило заключения*:

$$\frac{\Gamma,\ \Phi,\ \Phi \to \Psi}{\Psi},$$

где Γ — множество формул ИВ, Φ, Ψ — формулы ИВ. Правило заключения больше известно под его латинским названием — *modus ponens*, в связи с чем в выводе вместо ПВ будем писать MP.

Естественными кажутся вопросы:

— Почему аксиомы и правила вывода для ИВ выбраны именно таким образом?

— Что будет, если убрать одну аксиому?

— Для каждой ли формулы ИВ можно однозначно сказать, доказуема она или нет?

Мы вернёмся к этим вопросам чуть позже. Отметим только, что есть несколько определений исчисления высказываний. Все эти определения отличаются набором аксиом. Формально они разные, но содержательно они очень похожи друг на друга.

Всюду дальше, если не оговорено противное, под формулами будем понимать формулы исчисления высказываний. Также символами Φ, Ψ, Θ (возможно с индексами) будем обозначать формулы исчисления высказываний. Вместо $\vdash_{\text{ИВ}}$ будем писать просто $\vdash$.

Свойство 1. $\vdash \Phi \to \Phi$.

Доказательство.

1. $[\mathrm{A2}]\,{}^{\Psi}_{\Phi\to\Phi}\,{}^{\Theta}_{\Phi}$ $\big(\Phi \to (\Phi \to \Phi)\big) \to \Big(\big(\Phi \to ((\Phi \to \Phi) \to \Phi)\big) \to \big(\Phi \to \Phi\big)\Big)$.
2. $[\mathrm{A1}]\,{}^{\Psi}_{\Phi}$ $\Phi \to (\Phi \to \Phi)$.
3. $[\mathrm{MP}\ (2,\,1)]$ $\big(\Phi \to ((\Phi \to \Phi) \to \Phi)\big) \to \big(\Phi \to \Phi\big)$.
4. $[\mathrm{A1}]\,{}^{\Psi}_{\Phi\to\Phi}$ $\Phi \to ((\Phi \to \Phi) \to \Phi)$.
5. $[\mathrm{MP}\ (4,\,3)]$ $\Phi \to \Phi$. □

Свойство 2. $\Phi, \Psi \vdash \Phi \wedge \Psi$.

Доказательство.

1. [гип] Φ.
2. [гип] Ψ.
3. $[\mathrm{A5}]\,{}^{\Psi}_{\Phi}\,{}^{\Theta}_{\Psi}$ $(\Phi \to \Phi) \to ((\Phi \to \Psi) \to (\Phi \to \Phi \wedge \Psi))$.
4. [св. 1] $\Phi \to \Phi$.
5. $[\mathrm{MP}\ (4,\,3)]$ $(\Phi \to \Psi) \to (\Phi \to \Phi \wedge \Psi)$.
6. $[\mathrm{A1}]\,{}^{\Phi}_{\Psi}\,{}^{\Psi}_{\Phi}$ $\Psi \to (\Phi \to \Psi)$.
7. $[\mathrm{MP}\ (2,\,6)]$ $\Phi \to \Psi$.
8. $[\mathrm{MP}\ (7,\,5)]$ $\Phi \to \Phi \wedge \Psi$.
9. $[\mathrm{MP}\ (1,\,8)]$ $\Phi \wedge \Psi$. □

В доказательстве свойства 2 построен не совсем вывод формулы $\Phi \wedge \Psi$. Четвёртая формула в списке — уже известная нам доказуемая формула из свойства 1. Мы могли бы вместо этой формулы записать все 5 формул вывода, приведённого в доказательстве свойства 1, тем самым удлинив наш вывод. При решении практических задач вывод может состоять из огромного количества формул. Такое упрощение (использование уже известных нам выводимых формул) позволяет сократить это количество. Такой список формул называется *квазивыводом.*

Определение. Последовательность формул $\Psi_1, \ldots, \Psi_m \in F$ исчисления I называется *квазивыводом* формулы Φ из формул $\{\Phi_1, \ldots, \Phi_n\}$ исчисления I, если $\Psi_m \leftrightharpoons \Phi$ и Ψ_i выводима из $\Psi_1, \ldots, \Psi_{i-1}$ для любого $i \leqslant m$.

Как Вы наверняка заметили, любое доказательство мы начинали строить с того, что искали аксиому, которая бы (при нужных заменах) заканчивалась нужной формулой, а после этого по отдельности получали посылки и убирали их с помощью modus ponens. Зачастую эта тактика эффективна при решении подобных задач. Также рекомендуется сначала в вывод записать все имеющиеся гипотезы.

§3. Теорема дедукции

Теорема дедукции является одним из фундаментальных результатов в теории доказательств — разделе математической логики, занимающемся изучением математических доказательств. Теорема дедукции является примером классической ситуации в математике ранних лет, когда учёные, не знакомые друг с другом и живущие в разных странах, почти одновременно формулируют одну и ту же идею. Эта теорема впервые была сформулирована и доказана в 1930 году Жаком Эрбраном, французским математиком. В этом же году теорема дедукции была сформулирована Альфредом Тарским, польско-американским математиком, основателем формальной теории истинности.

Теорема 1 (дедукции). *Пусть* Γ *— множество формул ИВ,* Φ, Ψ *— формулы ИВ. Тогда*

$$\Gamma, \Phi \vdash \Psi \Longleftrightarrow \Gamma \vdash \Phi \to \Psi.$$

Доказательство.

Необходимость. Пусть $\Psi_1, \ldots, \Psi_n$ — вывод Ψ из $\Gamma \cup \{\Phi\}$. Индукцией по i покажем, что $\Gamma \vdash \Phi \to \Psi_i$.

1. Для формулы Ψ_1 возможны следующие случаи:

а) Ψ_1 — аксиома;

б) $\Psi_1 \in \Gamma$;

в) $\Psi_1 \leftrightharpoons \Phi$.

Построим вывод формулы $\Phi \to \Psi_1$ в случаях а) и б):

1. [аксиома или гипотеза] Ψ_1.

2. [A1] $\substack{\Phi \\ \Psi_1}\ \substack{\Psi \\ \Phi}$ $\Psi_1 \to (\Phi \to \Psi_1)$.

3. [MP (1, 2)] $\Phi \to \Psi_1$.

Если $\Psi_1 \leftrightharpoons \Phi$, то $\Gamma \vdash \Phi \to \Psi_1$ по свойству 1.

Таким образом, утверждение верно для $i = 1$.

2. Предположим, что $\Gamma \vdash \Phi \to \Psi_j$ для всех $j < i$. Для формулы Ψ_i возможны следующие случаи:

а) Ψ_i — аксиома;

б) $\Psi_i \in \Gamma$;

в) $\Psi_i \leftrightharpoons \Phi$;

г) Ψ_i выводится из $\Psi_1, \ldots, \Psi_{i-1}$ по modus ponens.

Очевидно, в случаях а)–в) вывод строится аналогично п. 1. Пусть Ψ_i выводится из $\Psi_1, \ldots, \Psi_{i-1}$ по modus ponens. Тогда Ψ_i получается из формул Ψ_k и $\Psi_l \leftrightharpoons \Psi_k \to \Psi_i$, где $k, l < i$. По предположению индукции $\Gamma \vdash \Phi \to \Psi_k$ и $\Gamma \vdash \Phi \to (\Psi_k \to \Psi_i)$. Так как вывод — это конечная последовательность формул, то выделим из множества Γ только те формулы $\Theta_1, \ldots, \Theta_m$, которые задействованы в выводе формул $\Phi \to \Psi_k$ и $\Phi \to (\Psi_k \to \Psi_i)$. Построим квазивывод формулы $\Phi \to \Psi_i$ из Γ:

1. [гип] Θ_1.

...

m. [гип] Θ_m.

$m+1$. [по предп.] $\Phi \to \Psi_k$.

$m+2$. [по предп.] $\Phi \to (\Psi_k \to \Psi_i)$.

$m+3$. [A2] $\frac{\Psi}{\Psi_k}\,\frac{\Theta}{\Psi_i}$ $\big(\Phi \to \Psi_k\big) \to \big((\Phi \to (\Psi_k \to \Psi_i)) \to (\Phi \to \Psi_i)\big)$.

$m+4$. [MP $((m+1,\, m+3),\, m+2)$] $\Phi \to \Psi_i$.

Следовательно, $\Gamma \vdash \Phi \to \Psi_n$, т.е. $\Gamma \vdash \Phi \to \Psi$.

Достаточность. Аналогично, выделим из множества Γ только те формулы $\Theta_1, \ldots, \Theta_m$, которые задействованы в выводе формулы $\Phi \to \Psi$. Построим квазивывод формулы Ψ из $\Gamma \cup \{\Phi\}$:

1. [гип] Θ_1.

...

m. [гип] Θ_m.

$m+1$. [по усл.] $\Phi \to \Psi$.

$m+2$. [гип] Φ.

$m+3$. [MP $(m+2,\, m+1)$] Ψ. □

Свойство 3 (контрапозиции). $\Phi \to \Psi \vdash \neg\Psi \to \neg\Phi$.

Доказательство.

Докажем, что $\Phi \to \Psi, \neg\Psi \vdash \neg\Phi$:

1. [гип] $\Phi \to \Psi$.
2. [гип] $\neg\Psi$.
3. [A9] $(\Phi \to \Psi) \to ((\Phi \to \neg\Psi) \to \neg\Phi)$.
4. [MP (1, 3)] $(\Phi \to \neg\Psi) \to \neg\Phi$.
5. [A1] $\frac{\Phi}{\neg\Psi}\,\frac{\Psi}{\Phi}$ $\neg\Psi \to (\Phi \to \neg\Psi)$.
6. [MP (2, 5)] $\Phi \to \neg\Psi$.
7. [MP (6, 4)] $\neg\Phi$.

Таким образом, $\Phi \to \Psi, \neg\Psi \vdash \neg\Phi$. Применив теорему дедукции, получим $\Phi \to \Psi \vdash \neg\Psi \to \neg\Phi$. □

Свойство 4 (транзитивности). $\Phi \to \Psi, \Psi \to \Theta \vdash \Phi \to \Theta$.

Упражнение 1. Докажите свойство 4 с использованием и без использования теоремы дедукции.

Докажем ещё несколько свойств, которыми удобно пользоваться при построении вывода формул.

Свойство 5. $\Phi \vdash \neg\neg\Phi$.

Доказательство.
1. [гип] Φ.
2. [A9] $\genfrac{}{}{0pt}{2}{\Phi}{\neg\Phi}\,\genfrac{}{}{0pt}{2}{\Psi}{\Phi}$ $(\neg\Phi \to \Phi) \to ((\neg\Phi \to \neg\Phi) \to \neg\neg\Phi)$.
3. [A1] $\genfrac{}{}{0pt}{2}{\Psi}{\neg\Phi}$ $\Phi \to (\neg\Phi \to \Phi)$.
4. [MP (1, 3)] $\neg\Phi \to \Phi$.
5. [MP (4, 2)] $(\neg\Phi \to \neg\Phi) \to \neg\neg\Phi$.
6. [св. 1] $\genfrac{}{}{0pt}{2}{\Phi}{\neg\Phi}$ $\neg\Phi \to \neg\Phi$.
7. [MP (6, 5)] $\neg\neg\Phi$. □

Свойство 6. $\Phi \wedge \neg\Phi \vdash \Psi$.

Доказательство.
1. [гип] $\Phi \wedge \neg\Phi$.
2. [A3] $\genfrac{}{}{0pt}{2}{\Psi}{\neg\Phi}$ $\Phi \wedge \neg\Phi \to \Phi$.
3. [MP (1, 2)] Φ.
4. [A4] $\genfrac{}{}{0pt}{2}{\Psi}{\neg\Phi}$ $\Phi \wedge \neg\Phi \to \neg\Phi$.
5. [MP (3, 4)] $\neg\Phi$.
6. [A1] $\genfrac{}{}{0pt}{2}{\Psi}{\neg\Theta}$ $\Phi \to (\neg\Theta \to \Phi)$.
7. [MP (3, 6)] $\neg\Theta \to \Phi$.
8. [св. контр. (7)] $\genfrac{}{}{0pt}{2}{\Phi}{\neg\Theta}\,\genfrac{}{}{0pt}{2}{\Psi}{\Phi}$ $\neg\Phi \to \neg\neg\Theta$.
9. [MP (5, 8)] $\neg\neg\Theta$.
10. [A10] $\genfrac{}{}{0pt}{2}{\Phi}{\Theta}$ $\neg\neg\Theta \to \Theta$.
11. [MP (9, 10)] Θ. □

§4. Эквивалентные формулы

Определение. Формулы Φ и Ψ называются *эквивалентными* (обозначение: $\Phi \equiv \Psi$), если $\Phi \vdash \Psi$ и $\Psi \vdash \Phi$.

Теорема 2. *Пусть Φ, Ψ, Θ — формулы. Тогда имеют место следующие эквивалентности:*

1. *a)* $\Phi \wedge \Phi \equiv \Phi$,
   b) $\Phi \vee \Phi \equiv \Phi$.
2. *a)* $\Phi \wedge \Psi \equiv \Psi \wedge \Phi$,
   b) $\Phi \vee \Psi \equiv \Psi \vee \Phi$.
3. *a)* $\Phi \wedge (\Psi \wedge \Theta) \equiv (\Phi \wedge \Psi) \wedge \Theta$,
   b) $\Phi \vee (\Psi \vee \Theta) \equiv (\Phi \vee \Psi) \vee \Theta$.
4. *a)* $\Phi \wedge (\Psi \vee \Theta) \equiv (\Phi \wedge \Psi) \vee (\Phi \wedge \Theta)$,
   b) $\Phi \vee (\Psi \wedge \Theta) \equiv (\Phi \vee \Psi) \wedge (\Phi \vee \Theta)$.
5. *a)* $\neg(\Phi \wedge \Psi) \equiv \neg\Phi \vee \neg\Psi$,
   b) $\neg(\Phi \vee \Psi) \equiv \neg\Phi \wedge \neg\Psi$.
6. *a)* $\Phi \wedge (\Phi \vee \Psi) \equiv \Phi$,
   b) $\Phi \vee (\Phi \wedge \Psi) \equiv \Phi$.
7. $\neg\neg\Phi \equiv \Phi$.
8. $\Phi \to \Psi \equiv \neg\Phi \vee \Psi$.

Наверняка многие читатели испытали дежавю при чтении записанных соотношений. Если в формулировке теоремы заменить слово «эквивалентности» на слово «равносильности», то получится в точности теорема **??** главы II (§4). Позже мы поймём, почему понятие равносильных формул алгебры высказываний и понятие эквивалентных формул исчисления высказываний приводят нас к одинаковым связям между формулами. А пока отметим ещё раз: формулы ИВ представляют собой лишь последовательности символов, не наделённые каким-либо смыслом, в отличие от формул АВ, которые являются сложными высказываниями, получаемыми из элементарных высказываний с помощью логических операций. Поэтому мы не называли эти эквивалентности, как сделали это с равносильными формулами АВ по аналогии со свойствами бинарных операций. Более того, определение эквивалентных формул ИВ полностью отличается от определения равносильных формул АВ, поэтому теорема доказывается по-другому.

Доказательство (теоремы 2).

По традиции докажем наиболее «сложные» пункты, оставив другие читателям для тренировки.

Докажем п. 6. $\Phi \vdash \neg\neg\Phi$ по свойству 5. Применив к аксиоме 10 теорему дедукции, получим $\neg\neg\Phi \vdash \Phi$.

Докажем п. 1b. Построим вывод формулы Φ из $\Phi \vee \Phi$:

1. [гип] $\Phi \vee \Phi$.
2. [A8] $\frac{\Psi}{\Phi}\,\frac{\Theta}{\Phi}$ $(\Phi \to \Phi) \to ((\Phi \to \Phi) \to (\Phi \vee \Phi \to \Phi))$.
3. [св. 1] $\Phi \to \Phi$.

4. [MP (3, 2)] $(\Phi \to \Phi) \to (\Phi \vee \Phi \to \Phi)$.
5. [MP (3, 4)] $\Phi \vee \Phi \to \Phi$.
6. [MP (1, 5)] Φ.

Таким образом, $\Phi \vee \Phi \vdash \Phi$. Применив к аксиоме 6, в которой формулу Ψ заменим на Φ, теорему дедукции, получим $\Phi \vdash \Phi \vee \Phi$. □

Домашнее задание. Докажите теорему 2.

Определение. Подслово формулы Φ, которое само является формулой, называется *подформулой* формулы Φ.

Лемма (о замене в ИВ). *Пусть Φ — формула ИВ, Ψ — подформула формулы Φ, $\Psi \equiv \Psi'$, формула Φ' получается из формулы Φ заменой подформулы Ψ на Ψ'. Тогда $\Phi \equiv \Phi'$.*

Доказательство.

Лемму о замене в ИВ также необходимо доказывать иначе, чем в АВ. Доказательство проведём индукцией по сложности формулы Φ.

1. Очевидно, что если $\Phi \leftrightharpoons X$, где X — пропозициональная переменная, то Φ — единственная подформула формулы Φ, т.е. $\Psi \leftrightharpoons X$. Тогда $\Psi' \equiv X$, т.е. $\Psi' \equiv \Phi$. Так как $\Phi' \leftrightharpoons \Psi'$, то $\Phi' \equiv \Phi$.

2. Пусть $\Phi \leftrightharpoons \Phi_1 \wedge \Phi_2$, Ψ — подформула формулы Φ_1, $\Psi \equiv \Psi'$, формула Φ_1' получается из формулы Φ_1 заменой подформулы Ψ на Ψ'. По предположению индукции $\Phi_1 \equiv \Phi_1'$. Докажем, что $\Phi_1 \wedge \Phi_2 \vdash \Phi_1' \wedge \Phi_2$:

1. [гип] $\Phi_1 \wedge \Phi_2$.
2. [A3] $\substack{\Phi \\ \Phi_1}\ \substack{\Psi \\ \Phi_2}$ $\Phi_1 \wedge \Phi_2 \to \Phi_1$.
3. [MP (1, 2)] Φ_1.
4. [по предп. (3)] Φ_1'.
5. [A4] $\substack{\Phi \\ \Phi_1}\ \substack{\Psi \\ \Phi_2}$ $\Phi_1 \wedge \Phi_2 \to \Phi_2$.
6. [MP (1, 5)] Φ_2.
7. [св. 2 (4, 6)] $\substack{\Phi \\ \Phi_1'}\ \substack{\Psi \\ \Phi_2}$ $\Phi_1' \wedge \Phi_2$.

Аналогично можно показать, что $\Phi_1' \wedge \Phi_2 \vdash \Phi_1 \wedge \Phi_2$. Следовательно,

$$\Phi_1 \wedge \Phi_2 \equiv \Phi_1' \wedge \Phi_2.$$

Случай, когда $\Phi \leftrightharpoons \Phi_1 \vee \Phi_2$, предоставляется читателям в качестве упражнения.

Пусть $\Phi \leftrightharpoons \neg\Phi_1$, Ψ — подформула формулы Φ_1, $\Psi \equiv \Psi'$, формула Φ_1' получается из формулы Φ_1 заменой подформулы Ψ на Ψ'. По предположению индукции $\Phi_1 \equiv \Phi_1'$. Тогда $\Phi_1 \vdash \Phi_1'$ и $\Phi_1' \vdash \Phi_1$. По теореме дедукции $\vdash \Phi_1 \to \Phi_1'$ и $\vdash \Phi_1' \to \Phi_1$. По свойству контрапозиции $\vdash \neg\Phi_1' \to \neg\Phi_1$ и $\vdash \neg\Phi_1 \to \neg\Phi_1'$. По теореме дедукции $\neg\Phi_1' \vdash \neg\Phi_1$ и $\neg\Phi_1 \vdash \neg\Phi_1'$, т.е. $\neg\Phi_1 \equiv \neg\Phi_1'$.

Пусть $\Phi \leftrightharpoons \Phi_1 \to \Phi_2$, Ψ — подформула формулы Φ_1, $\Psi \equiv \Psi'$, формула Φ_1' получается из формулы Φ_1 заменой подформулы Ψ на Ψ'. По предположению индукции $\Phi_1 \equiv \Phi_1'$. Тогда

$$\Phi_1 \to \Phi_2 \equiv \neg\Phi_1 \vee \Phi_2 \equiv \neg\Phi_1' \vee \Phi_2 \equiv \Phi_1' \to \Phi_2.$$

Здесь мы воспользовались тем, что для формул вида $\neg\Psi$ и $\Psi \vee \Theta$ лемма доказана на предыдущих шагах. □

Домашнее задание. Докажите не рассмотренные нами случаи леммы о замене.

Свойство 7. $\vdash \Phi \vee \neg\Phi$.

Доказательство.

Пусть Ψ — аксиома. По свойству 6 верно $\Phi \wedge \neg\Phi \vdash \neg\Psi$. По теореме дедукции $\vdash \Phi \wedge \neg\Phi \to \neg\Psi$. Тогда по свойству контрапозиции $\vdash \neg\neg\Psi \to \neg(\Phi \wedge \neg\Phi)$.

$$\neg\neg\Psi \to \neg(\Phi \wedge \neg\Phi) \equiv \Psi \to \neg\Phi \vee \neg\neg\Phi \equiv \Psi \to \neg\Phi \vee \Phi \equiv \Psi \to \Phi \vee \neg\Phi.$$

Следовательно, $\vdash \Psi \to \Phi \vee \neg\Phi$. Так как Ψ — аксиома, то $\vdash \Phi \vee \neg\Phi$. □

Использование леммы о замене и эквивалентностей из теоремы 2 позволяет упростить построение вывода формулы из множества формул: мы можем менять подформулы на эквивалентные им формулы, сокращая вывод на несколько пунктов. Но чтобы лучше прочувствовать, как устроено исчисление высказываний, понять суть аксиом и правила вывода, а также ради развлечения и эстетического удовольствия мы на наших практических занятиях и при выполнении ИДЗ пользоваться леммой о замене и теоремой 2 не будем.☺

§5. Семантика формального исчисления

Согласно определению формальное исчисление задаётся в терминах отношений и связей между своими базовыми элементами, т.е. *синтаксически*. Формулы исчисления являются лишь последовательностями символов алфавита и только. Как мы не раз отмечали, формулы исчисления не наделены никаким смыслом, они не могут быть истинными или ложными, не могут принимать какие-то другие значения. Конкретный смысл они приобретают при *интерпретации* алфавита (или, как иногда говорят, *языка*) исчисления, которая задаёт *семантику*, определяющую связи между видом и смыслом языковых единиц.

Определение. Пусть задано формальное исчисление I. Если каждому символу алфавита I поставлен в соответствие элемент некоторого множества или функция, то говорят, что задана *интерпретация исчисления* I.

Теорема 3. *Алгебра высказываний является интерпретацией исчисления высказываний.*

Доказательство. Пропозициональные переменные интерпретируем элементарными высказываниями. Символы логических связок интерпретируем соответствующими логическими операциями: $\wedge$ — конъюнкция, $\vee$ — дизъюнкция, $\urcorner$ — отрицание, $\to$ — импликация. $\square$

Исходя из теоремы 3, сразу становится понятным, почему формулы АВ внешним видом похожи на формулы ИВ, почему равносильные формулы АВ являются эквивалентными как формулы ИВ. В дальнейшем мы докажем, что тавтологиями АВ являются в точности доказуемые формулы ИВ.

Алгебру высказываний называют *главной интерпретацией* исчисления высказываний.

Но раз есть главная интерпретация, то есть и другие? Рассмотрим следующий пример. Пусть S — множество, отображение $f_S : F \to \mathcal{P}(S)$, где F — множество формул ИВ, удовлетворяет следующим условиям: для любых формул Φ и Ψ

1) $f_S(\Phi \wedge \Psi) = f_S(\Phi) \cap f_S(\Psi)$,
2) $f_S(\Phi \vee \Psi) = f_S(\Phi) \cup f_S(\Psi)$,
3) $f_S(\urcorner\Phi) = S \setminus f_S(\Phi)$,
4) $f_S(\Phi \to \Psi) = f_S(\urcorner\Phi) \cup f_S(\Psi)$.

Проинтерпретировав пропозициональные переменные элементами множества $\mathcal{P}(S)$, мы получим интерпретацию ИВ. Например, если $S = \{a, b, c\}$, $f_S(X) = \{a, b\}$, $f_S(Y) = \{a, c\}$, то

$$\begin{gathered} f_S(X \wedge Y) = \{a\}, \\ f_S(X \vee Y) = \{a, b, c\}, \\ f_S(\urcorner X) = \{c\}, \\ f_S(X \to Y) = \{a, c\}. \end{gathered}$$

Упражнение 2. Сравните свойства операций над множествами (Глава I, §2, теорема **??**) с эквивалентными формулами из теоремы 2.

Согласно определению формального исчисления доказательство теорем (построение вывода) в исчислении осуществляется формально, с использованием только аксиом и правил вывода. Сами доказательства при этом также могут служить предметом исследования. Однако о них и о свойствах самого исчисления приходится рассуждать неформально, содержательно, в терминах, которые выходят за рамки самого исчисления. Такие рассуждения проводят на *метаязыке* данного исчисления.

Рассмотрим два утверждения:

1) «Матвей — хороший мальчик»,

2) «Матвей — слово из 6 букв».

В первом случае слово «Матвей» является элементом языка, Матвей рассматривается как объект, приводится свойство Матвея «быть хорошим мальчиком».

Во втором случае слово «Матвей» принадлежит метаязыку, изучаются характеристики самого слова.

Другой классический пример: в русском учебнике английского языка предметным языком будет английский, а метаязыком — русский (на нём проводятся рассуждения об английском языке).

При изучении исчисления высказываний мы тоже задействуем метаязык. Например, мы используем символы Φ, Ψ, Θ для обозначения формул, но сами символы не являются элементами алфавита ИВ.

Совокупность сформулированных на метаязыке утверждений относительно свойств формального исчисления образуют его *метатеорию*. В свою очередь, метатеория тоже может быть формализована и изучена средствами, выходящими за рамки этой метатеории. Полученные факты о метатеории будут являться для неё *метаметатеорией*, и т.д... Раздел математической логики, изучающий основания математики, структуру математических доказательств и математических теорий с помощью формальных методов, называется *метаматематикой*.

Основные вопросы метатеории формального исчисления:

— непротиворечивость,

— полнота,

— разрешимость,

— независимость.

Рассмотрим эти вопросы относительно исчисления высказываний.

§6. Непротиворечивость ИВ

Определение. Исчисление называется *противоречивым*, если доказуемы все его формулы.

Согласитесь, противоречивое исчисление малоинтересно для изучения. Согласно определению никакая формула противоречивого исчисления не может быть опровергнута. Требование непротиворечивости (в общем смысле) является обязательным требованием к научной и, в частности, логической теории.

Лемма. *Если Φ — доказуемая формула ИВ, то Φ является тождественно истинной как формула АВ.*

Доказательство.

Нетрудно заметить, что modus ponens сохраняет свойство быть тождественно истинной формулой АВ, т.е.

$$\vDash \Phi,\ \vDash \Phi \to \Psi\ \Rightarrow \vDash \Psi.$$

Легко проверить, что все аксиомы ИВ являются тождественно истинными формулами АВ (например, построив таблицы истинности или методом от противного).

Пусть $\vdash \Phi$ и $\Psi_1, \dots, \Psi_n$ — вывод Φ. Индукцией по $i \leqslant n$ можно показать, что $\vDash \Psi_i$. □

Домашнее задание. Докажите лемму.

Теорема 4 (о непротиворечивости ИВ). *ИВ непротиворечиво.*

Доказательство.

Предположим, что ИВ противоречиво. Тогда существует такая формула ИВ Φ, что $\vdash \Phi$ и $\vdash \neg\Phi$. По лемме $\vDash \Phi$ и $\vDash \neg\Phi$. Получили противоречие. □

§7. Полнота ИВ

Интерпретация формального исчисления позволяет перейти от синтаксиса к семантике. Но, согласно определению, на интерпретацию не накладывается никаких жёстких требований. Вообще говоря, мы можем проинтерпретировать пропозициональные переменные, не получив ничего полезного. Например, полагая $S = \varnothing$ в примере из §5, мы зададим интерпретацию ИВ, в которой все формулы будут интерпретироваться как $\varnothing$. Изучая содержательные свойства таких формул, мы вряд ли сможем установить какие-то полезные факты об ИВ.

Перекинуть мостик от одной области к другой и призвана теорема о полноте, которая будет доказана в настоящем параграфе. Мы уже показали, что всякая теорема исчисления высказываний является тавтологией алгебры высказываний (лемма, §6). Оказывается, верно и обратное — для всякой тавтологии алгебры высказываний можно построить её вывод из аксиом исчисления высказываний, т.е. доказать, что она является теоремой исчисления. В этом состоит теорема о полноте ИВ.

Определение. Формула ИВ вида X или $\urcorner X$, где X — пропозициональная переменная ИВ, называется *литерой.*

Теорема 5 (о полноте ИВ). *Формула Φ доказуема в ИВ тогда и только тогда, когда Φ является тождественно истинной как формула АВ.*

Доказательство.

Необходимость. См. лемму, §6.

Достаточность. Пусть Φ — тавтология АВ. Рассмотрим Φ как формулу ИВ. Доказательство разобьём на несколько этапов.

I. С помощью теоремы 2 и леммы о замене в ИВ приведём формулу Φ к виду $\Psi \leftrightharpoons \Psi_1 \wedge \ldots \wedge \Psi_n$, где Ψ_i получена из литер с помощью логической связки $\vee$.

II. $\models \Psi$:

$$\Phi \equiv \Psi \overset{\text{по опр.}}{\Longrightarrow} \Phi \vdash \Psi \overset{\text{т. дед.}}{\Longrightarrow} \vdash \Phi \to \Psi \overset{\text{лемма, §6}}{\Longrightarrow} \models \Phi \to \Psi \overset{\models\Phi}{\Longrightarrow} \models \Psi.$$

III. Очевидно, что $\models \Psi_i$ для любого $i \leqslant n$.

IV. Для любого $i \leqslant n$ существует переменная X такая, что X и $\urcorner X$ входит в Ψ_i (почему?).

V. Докажем, что $\vdash \Psi_i$ для любого $i \leqslant n$. Пусть $\Psi_i \equiv X \vee \urcorner X \vee \Theta_i$, где Θ_i получена из литер с помощью логической связки $\vee$, $i \leqslant n$. Построим вывод Ψ_i:

1. [св. 7] $\frac{\Phi}{X}$ $X \vee \urcorner X$.
2. [A6] $\frac{\Phi}{X\vee\urcorner X}\,\frac{\Psi}{\Theta_i}$ $X \vee \urcorner X \to X \vee \urcorner X \vee \Theta_i$.
3. [MP (1, 2)] $X \vee \urcorner X \vee \Theta_i$.

VI. $\vdash \Psi$ по свойству 2.

VII. $\vdash \Phi$ по определению. □

Таким образом, теорема о полноте исчисления высказываний связывает абстрактную аксиоматическую теорию высказываний и содержательную алгебру высказываний, теорию с практикой.

§8. Разрешимость ИВ

Определение. Формальное исчисление I называется *алгоритмически разрешимым*, или просто *разрешимым*, если существует алгоритм, позволяющий для произвольной формулы исчисления I за конечное число шагов определить, является ли она доказуемой в I или нет.

Очевидно, противоречивое исчисление является разрешимым — в нём доказуема абсолютно любая формула. В качестве нужного алгоритма можно взять последовательность из одной команды «остановить выполнение алгоритма».

Разрешимость — сильное свойство, и далеко не все полезные и используемые на практике теории могут им похвастаться. Исчислению высказываний здесь повезло.

Теорема 6 (о разрешимости ИВ). *ИВ разрешимо.*

Доказательство.

Согласно определению для доказательства нужно указать алгоритм, по которому для абсолютно любой формулы ИВ за конечное число шагов можно определить, выводится она из множества аксиом ИВ или нет. По теореме 5 вопрос можно сформулировать следующим образом: существует ли алгоритм, по которому для абсолютно любой формулы АВ за конечное число шагов можно определить, тождественно истинная она или нет? Такой алгоритм нам уже известен и сразу напрашивается в качестве ответа на вопрос — построение таблицы истинности. Так как любая формула АВ содержит конечное число различных логических переменных, то таблица истинности любой формулы АВ конечна. Если в последнем столбце таблицы стоят только И, то формула является тавтологией АВ, а следовательно, и теоремой ИВ. В противном случае формула не является теоремой ИВ. Вопрос об эффективности этого алгоритма здесь не ставится, так как нас интересует лишь существование такого алгоритма. $\square$

§9. Независимость ИВ

В этом параграфе мы решим ещё один из поставленных в §2 вопросов об ИВ: все ли аксиомы действительно являются аксиомами в традиционном смысле? Можно ли убрать одну из них, не изменив тем самым множество теорем ИВ?

Определение. Аксиома формального исчисления I называется *независимой*, если она не выводится из остальных аксиом в исчислении I. Исчисление называется *независимым*, если каждая его аксиома независима.

Теорема 7 (о независимости ИВ). *ИВ независимо.*

Доказательство.

Наметим общий план доказательства независимости аксиомы A ИВ. Возьмём некоторую интерпретацию f ИВ, в которой все аксиомы ИВ, за исключением A, принимают значение f_0, а МР сохраняет свойство принимать значение f_0. Очевидно, аксиома A не может быть получена из других аксиом: в противном случае она также принимала бы значение f_0 при интерпретации f.

Докажем независимость аксиомы A10. Пусть пропозициональные переменные могут принимать значения из множества $\{0, 1\}$, логические связки $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ проинтерпретируем стандартными логическими операциями[1], т.е.

Φ	Ψ	$\Phi \wedge \Psi$	$\Phi \vee \Psi$	$\Phi \rightarrow \Psi$
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

Будем считать, что формула $\neg\Phi$ при этой интерпретации всегда принимает значение 1. Так как в аксиомах A1–A8 не используется символ $\neg$, то они всегда принимают значение 1. По той же причине МР позволяет из формул, всегда принимающих значение 1, получить только формулу, всегда принимающую значение 1. Составив таблицу значений аксиомы A9, можно убедиться, что она также всегда принимает значение 1. Составим таблицу значений аксиомы A10:

Φ	$\neg\Phi$	$\neg\neg\Phi$	$\neg\neg\Phi \rightarrow \Phi$
0	1	1	0
1	1	1	1

Следовательно, A10 независима.

Докажем независимость аксиомы A9. Пусть интерпретация ИВ будет такой же, как при доказательстве независимости аксиомы A10, за исключением интерпретации символа $\neg$:

Φ	$\neg\Phi$
0	0
1	1

Так как в аксиомах A1–A8 не используется символ $\neg$, то они всегда принимают значение 1. По той же причине МР позволяет из формул, всегда принимающих

[1] Намеренно используем здесь другие обозначения, чтобы не путать с истинностными значениями формул АВ. Наверняка с такими обозначениями Вы сталкивались на уроках информатики в школе и при изучении дискретной математики в университете.

значение 1, получить только формулу, всегда принимающую значение 1. Составив таблицу значений аксиомы A10, можно убедиться, что она также всегда принимает значение 1.

Если Φ принимает значение 0, а Ψ принимает значение 1, то $\Phi \to \Psi$, $\Phi \to \neg\Psi$ принимают значение 1. При этом $\neg\Phi$ принимает значение 0. Следовательно, формула $(\Phi \to \Psi) \to ((\Phi \to \neg\Psi) \to \neg\Phi)$ на указанном наборе значений входящих в неё подформул принимает значение 0. Поэтому A9 не может быть выведена из формул A1–A8 и A10 с помощью MP. Следовательно, A9 независима. $\square$

Задание на +1 балл за коллоквиум. Докажите независимость какой-нибудь аксиомы ИВ.

Примечания:

1. В счёт идёт первое показанное доказательство по каждой аксиоме. Если два студента независимо друг от друга доказали независимость одной и той же аксиомы, +1 балл заработает первый принёсший верное доказательство.

2. Количество дополнительных баллов не зависит от количества аксиом, которые Вы проверили на независимость. Либо +1 балл, либо 0. Дайте другим возможность насладиться исследованием математической логики и заработать дополнительные баллы.

3. Каждая аксиома, независимость которой будет кем-нибудь доказана, считается проверенной всеми и выносится на коллоквиум.

§10. Другие определения исчисления высказываний

Разберёмся, наконец, с оставшимся вопросом из тех, что мы сформулировали в §2. Почему аксиомы и правила вывода в определённом нами исчислении высказываний именно такие?

На самом деле нами дано далеко не единственно существующее определение исчисления высказываний.

Сформулируем сначала определения исчислений высказываний гильбертовского типа. Этот тип исчислений является исторически первым. Характерная черта такого исчисления — много аксиом и мало правил вывода. «Рассуждение» внутри исчисления высказываний гильбертвоского типа ведётся напрямую: имея множество гипотез мы, применяя к ним правила вывода и используя аксиомы, постепенно движемся к выводимой формуле. Изученное нами ИВ так же относится к исчислениям гильбертовского типа.

Исчисление высказываний H

I. *Алфавит H:*

1) пропозициональные переменные: p, q, ..., z (возможно с индексами),

2) примитивные логические связки: $\neg, \rightarrow$,

3) (,).

II. *Формулы* H:

1) пропозициональная переменная — формула исчисления H,

2) если Φ, Ψ — формулы H, то $(\Phi \rightarrow \Psi)$, $\neg\Phi$ — формулы исчисления H.

III. Для любых формул Φ, Ψ, Θ исчисления H следующие формулы являются *аксиомами* H:

A1. $\Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Phi)$.

A2. $(\Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Theta)) \rightarrow ((\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow (\Phi \rightarrow \Theta))$.

A3. $(\neg\Phi \rightarrow \neg\Psi) \rightarrow ((\neg\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow \Phi)$.

IV. *Правила вывода* H:

ПВ1 (MP).

$$\frac{\Gamma,\ \Phi,\ \Phi \rightarrow \Psi}{\Psi},$$

где Γ — множество формул исчисления H, Φ, Ψ — формулы исчисления H.

Кажется, что такое обеднение множества аксиом значительно уменьшает количество доказуемых формул, но это не так. Стоит вспомнить, что в изученном нами ИВ имеют место следующие эквивалентности:

$$\Phi \vee \Psi \equiv \neg\neg\Phi \vee \Psi \equiv \neg\Phi \rightarrow \Psi,$$

$$\Phi \wedge \Psi \equiv \neg(\neg\Phi \vee \neg\Psi) \equiv \neg(\Phi \rightarrow \neg\Psi).$$

Исчисление высказываний H'

I. *Алфавит H':*

1) пропозициональные переменные: p, q, ..., z (возможно с индексами),

2) примитивные логические связки: $\neg, \rightarrow$,

3) (,).

II. *Формулы* H':

1) пропозициональная переменная — формула H',

2) если Φ, Ψ — формулы H', то $(\Phi \rightarrow \Psi)$, $\neg\Phi$ — формулы H'.

III. *Аксиомы* H':

A1. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$.

A2. $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$.

A3. $(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow p)$.

IV. *Правила вывода* H':

ПВ1 (MP).

$$\frac{\Gamma,\ \Phi,\ \Phi \to \Psi}{\Psi},$$

где Γ — множество формул H', Φ, Ψ — формулы H'.

ПВ2 (правило подстановки). $\vdash_{H'} \Phi(p_1, \ldots, p_n) \Longrightarrow \vdash_{H'} [\Phi]\,^{p_1\ \ldots\ p_n}_{\Psi_1\ \ldots\ \Psi_n}$ для любых формул $\Psi_1, \ldots, \Psi_n$ исчисления H'.

Как видно из определения, исчисление H' отличается от исчисления H тем, что в списке аксиом указаны конкретные аксиомы, а не схемы аксиом, и добавлено одно правило вывода. Правило подстановки позволяет в любой аксиоме заменить пропозициональные переменные на формулы H', что превращает H' в более конструктивную версию исчисления H. Заметьте, что правило подстановки применимо только к теоремам H'.

Исчисление высказываний Гильберта–Аккермана

Приведённое в этом пункте исчисление высказываний (обозначим его через HA) рассматривается в фундаментальной монографии Д. Гильберта и В. Аккермана «Основы теоретической логики».

I. *Алфавит* HA*:*

1) пропозициональные переменные: A, B, ..., Z (возможно с индексами),

2) примитивные логические связки: $\urcorner, \vee$, (связка $\to$ вводится для сокращения записи $\urcorner\Phi \vee \Psi$ до $\Phi \to \Psi$),

3) (,).

II. *Формулы* HA:

1) пропозициональная переменная — формула HA,

2) если Φ, Ψ — формулы HA, то $(\Phi \vee \Psi)$, $\urcorner\Phi$ — формулы HA.

III. Для любых формул Φ, Ψ, Θ исчисления HA следующие формулы являются *аксиомами* HA:

A1. $\Phi \vee \Phi \to \Phi$.

A2. $\Phi \to \Phi \vee \Psi$.

A3. $\Phi \vee \Psi \to \Psi \vee \Phi$.

A4. $(\Phi \to \Psi) \to (\Theta \vee \Phi \to \Theta \vee \Psi)$.

IV. *Правила вывода* HA:

ПВ1 (MP).

$$\frac{\Gamma,\ \Phi,\ \Phi \to \Psi}{\Psi},$$

где Γ — множество формул исчисления HA, Φ, Ψ — формулы исчисления HA.

Исчисление высказываний Клини

Следующее определение исчисления высказываний (обозначим его через K) рассматривается в монографии С.К. Клини «Математическая логика».

I. *Алфавит K:*

1) пропозициональные переменные: A, B, $\ldots$, Z (возможно с индексами),

2) логические связки: $\neg, \vee, \wedge, \to, \sim$,

3) (,).

II. *Формулы* K:

1) пропозициональная переменная — формула K,

2) если Φ, Ψ — формулы K, то $(\Phi \wedge \Psi)$, $(\Phi \vee \Psi)$, $(\Phi \to \Psi)$, $(\Phi \sim \Psi)$, $\neg\Phi$ — формулы K.

III. Для любых формул Φ, Ψ, Θ исчисления K следующие формулы являются *аксиомами* K:

A1. $\Phi \to (\Psi \to \Phi)$.

A2. $(\Phi \to \Psi) \to ((\Phi \to (\Psi \to \Theta)) \to (\Phi \to \Theta))$.

A3. $\Phi \to (\Psi \to \Phi \wedge \Psi)$.

A4. $\Phi \wedge \Psi \to \Phi$.

A5. $\Phi \wedge \Psi \to \Psi$.

A6. $\Phi \to \Phi \vee \Psi$.

A7. $\Psi \to \Phi \vee \Psi$.

A8. $(\Phi \to \Theta) \to ((\Psi \to \Theta) \to (\Phi \vee \Psi \to \Theta))$.

A9. $(\Phi \to \Psi) \to ((\Phi \to \neg\Psi) \to \neg\Phi)$.

A10. $\neg\neg\Phi \to \Phi$.

A11. $(\Phi \to \Psi) \to ((\Psi \to \Phi) \to (\Phi \sim \Psi))$.

A12. $(\Phi \sim \Psi) \to (\Phi \to \Psi)$.

A13. $(\Phi \sim \Psi) \to (\Psi \to \Phi)$.

IV. *Правила вывода* K:

ПВ1 (MP).

$$\frac{\Gamma,\ \Phi,\ \Phi \to \Psi}{\Psi},$$

где Γ — множество формул исчисления K, Φ, Ψ — формулы исчисления K.

Упражнение 3. Докажите, что формула $\Phi \to \Phi$ является теоремой в любом из определённых исчислений.

Исчисления гильбертовского типа больше подходят для теоретического исследования собственных свойств исчисления высказываний. Для практических целей зачастую используют исчисление высказываний генценовского типа, которое иногда называют исчислением секвенций. Характерная черта исчисления высказываний генценовского типа — мало аксиом и много правил вывода.

Исчисление секвенций

Следующее определение исчисления высказываний можно найти в книге Ю.Л. Ершова, Е.А. Палютина «Математическая логика». Тем студентам, которые заинтересовались математической логикой как наукой и захотели подробно изучить её, рекомендуется прочитать первую главу указанной книги и разобрать все упражнения этой главы.

I. *Алфавит ИС:*

1) пропозициональные переменные: Q_0, Q_1, Q_2, $\ldots$,

2) логические связки: $\neg, \vee, \wedge, \to, \vdash$,

3) логическая константа $\mathcal{F}$,

4) (,) , ,.

II. *Формулы ИС*:

1) пропозициональная переменная — формула ИС,

2) $\mathcal{F}$ — формула ИС,

3) если Φ, Ψ — формулы ИС, то $(\Phi \wedge \Psi)$, $(\Phi \vee \Psi)$, $(\Phi \to \Psi)$, $\neg\Phi$ — формулы ИС.

Определение. *Секвенцией* ИС называют слово вида

$$\Phi_1, \ldots, \Phi_n \vdash \Psi,$$

где $\Phi_1, \ldots, \Phi_n, \Psi$ — формулы ИС. Если $n = 0$, то секвенция имеет вид $\vdash \Psi$.

III. Для любой формулы Φ исчисления секвенций следующая секвенция являются *аксиомой ИС*:

$$\text{A1. } \Phi \vdash \Phi.$$

IV. Как Вы наверняка поняли из названия исчисления, здесь речь идёт о выводе одних секвенций из других. Правило вывода для ИС будем записывать в виде

$$\frac{S_1; \ldots; S_n}{S},$$

где $S_1, \ldots, S_n, S$ — секвенции. В этой записи будем говорить, что *секвенция S получается из секвенций $S_1, \ldots, S_n$*.

Правила вывода ИС:

ПВ1. $$\frac{\Gamma \vdash \Phi; \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}.$$

ПВ3. $$\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}.$$

ПВ2. $$\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}.$$

ПВ4. $$\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}.$$

ПВ5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$.

ПВ6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Theta; \Gamma, \Psi \vdash \Theta; \Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}{\Gamma \vdash \Theta}$.

ПВ7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$.

ПВ8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$.

ПВ9. $\dfrac{\Gamma, \urcorner\Phi \vdash \mathcal{F}}{\Gamma \vdash \Phi}$.

ПВ10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi; \Gamma \vdash \urcorner\Phi}{\Gamma \vdash \mathcal{F}}$.

ПВ11. $\dfrac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash \Theta}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Theta}$.

ПВ12. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$.

Здесь Φ, Ψ, Θ — формулы ИС, Γ, Γ_1 — последовательности формул ИС (возможно пустые).

Упражнение 4. Сравните правила вывода ИС и аксиомы ИВ, свойства, теоремы, которые мы доказывали при изучении ИВ.

Определение *дерева секвенций*:

1) всякая секвенция является деревом;

2) если $D_1, \ldots, D_n$ — деревья и S — секвенция, то

$$\frac{D_1; \ldots; D_n}{S}$$

— дерево.

Секвенцию вместе с её местом расположения в дереве D называют *вхождением секвенции в дерево* D. Вхождение секвенции в дерево D, над которым нет горизонтальной черты, называют *начальным* в D. Вхождение секвенции в D, под которым нет горизонтальной черты, называют *заключительным в* D. Часть дерева, состоящая из секвенций, расположенных непосредственно над некоторой чертой, под той же чертой, и самой черты, называется *переходом.*

Определение. Дерево D называется *доказательством секвенции* S *в виде дерева* или *деревом вывода* S, если все его начальные секвенции — аксиомы ИС, переходы — применения правил вывода ИС, а заключительной секвенцией D является S.

Например, построим дерево вывода секвенции $\Phi, \Psi \vdash \Phi \wedge \Psi$:

$$\dfrac{\dfrac{\Phi \vdash \Phi}{\Phi, \Psi \vdash \Phi}; \quad \dfrac{\dfrac{\Psi \vdash \Psi}{\Psi, \Phi \vdash \Psi}}{\Phi, \Psi \vdash \Psi}}{\Phi, \Psi \vdash \Phi \wedge \Psi}.$$

Определение. Формула Φ ИС называется *доказуемой* в ИС, если существует дерево вывода секвенции $\vdash \Phi$.

«Рассуждения» в исчислении высказываний генценовского типа удобнее проводить в обратном порядке: доказывая какую-то секвенцию, мы записываем её внизу и постепенно надстраиваем над ней дерево вывода, двигаясь снизу вверх. В этом состоит ещё одно отличие исчисления секвенций от исчисления высказываний гильбертовского типа.

Упражнение 5. Докажите, что формула $\neg\neg\Phi \to \Phi$ доказуема в ИС.