

ЕФРЕМОВ ЕВГЕНИЙ ЛЕОНИДОВИЧ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

ВЛАДИВОСТОК

2021 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

IV. Логика предикатов	80
§1. Понятие сигнатуры	81
§2. Алгебраические системы	82
§3. Термы сигнатуры	84
§4. Формулы сигнатуры	86
§5. Истинность формулы в алгебраической системе	88
§6. Равносильные формулы	90
§7. Нормальные формы	93
§8. Логическое следствие в ЛП	98
§9. Подстановки формул	99
§10. Унификация формул	101
§11. Понятие резолютивного вывода в ЛП	104
§12. Метод резолюций в ЛП	105

ГЛАВА IV

ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ

Перед тем как приступить к изучению алгебры высказываний, мы сделали уточнение, что именно мы понимаем под высказыванием и как сильно «делим» высказывание на составляющие. Внутри любого высказывания мы не выделяли объекты, о которых в нём идёт речь, а также их свойства. Например, утверждение «*скромный Вячеслав с букетом белых маргариток подошёл к зеленоглазой девушке в сиреновом платье*» с точки зрения алгебры высказываний является элементарным высказыванием: оно либо истинно, либо ложно, и его истинность не зависит от истинности других высказываний. Но нельзя не отметить, что это утверждение содержит куда больше информации, чем тот факт, что Вячеслав подошёл к девушке. В этом утверждении не просто сформулирован какой-то «элементарный» процесс, в нём отражены различные характеристики этого процесса. А именно:

- указано, какие объекты участвуют в этом процессе (*Вячеслав, девушка*),
- перечислены характеристики участвующих объектов (*скромный Вячеслав, Вячеслав с букетом белых маргариток, зеленоглазая девушка, девушка в сиреновом платье*),
- указано действие, которое совершают объекты (*Вячеслав подошёл к девушке*).

Если проводить аналогию с уже известными Вам математическими объектами, то можно сказать, что на множестве людей {Вячеслав, девушка} определены различные одноместные (быть скромным, иметь букет белых маргариток, иметь зелёные глаза, быть одетым в сиреневое платье) и двухместные (один подошёл к другому) отношения. Эти отношения в математической логике называют *предикатами* (от лат. *praedicatum* — сказанное). Формальное исчисление, в котором высказывания рассматриваются относительно входящих в них объектов и их свойств, называется *исчислением предикатов* или, как чаще говорят,

логикой первого порядка.

Так же как и с высказываниями, изучение логики первого порядка будет поделено на две части. В первой части, которая называется «Логика предикатов», мы познакомимся с семантикой исчисления предикатов. Во второй части мы дадим определение исчисления предикатов и изучим его свойства.

§1. Понятие сигнатуры

Пусть A — непустое множество.

Определение. n -местной операцией на A ($n \in \omega$) называется отображение $F : A^n \rightarrow A$.

Например, операциями будут следующие отображения:

$+$: $\mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ — обычное сложение целых чисел, двухместная операция на $\mathbb{Z}$;

$::$: $(\mathbb{R} \setminus \{0\})^2 \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ — обычное деление действительных чисел, двухместная операция на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$;

s : $\omega \rightarrow \omega$ — одноместная операция увеличения натурального числа на 1;

T : $M^{n \times n} \rightarrow M^{n \times n}$ — одноместная операция транспонирования квадратной матрицы размерности n .

Отдельно стоит поговорить о нульместных операциях. Согласно определению декартова произведения $A^0 = \{\emptyset\}$ для любого множества A . Следовательно, если F — нульместная операция на множестве A , то в A зафиксируется единственный элемент $F(\emptyset)$. В этом случае элемент $F(\emptyset)$ и саму операцию F будем называть *константой*. Например, операция $Star : \mathcal{M}^0 \rightarrow \mathcal{M}$, фиксирующая во множестве студентов направления МОАИС $\mathcal{M}$ старосту, является, как и сам староста направления, константой.

Определение. n -местным предикатом на A ($n \in \omega \setminus \{0\}$) называется подмножество $P \subseteq A^n$.

Например, предикатами будут следующие подмножества:

$<\subseteq \mathbb{Z}^2$ — множество пар различных целых чисел с меньшим первым числом, двухместный предикат на $\mathbb{Z}$;

$\vdots \subseteq \mathbb{N}^2$ — отношение делимости на множестве натуральных чисел, двухместный предикат;

$2\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ — отношение «быть чётным», одноместный предикат на $\mathbb{Z}$.

Всюду дальше для обозначения n -местных операций, где $n > 0$, будем использовать символы F, G, H (возможно с индексами), для обозначения предикатов будем использовать символы P, Q, R, S (возможно с индексами), для обозначения констант — символы c, d (возможно с индексами). Исключение составляют символы стандартных операций, предикатов и констант $+$, $-$, $\times$, $<$, $\geq$, $\subseteq$, 0 , 1 и т.п.

Определение. Совокупность символов операций и предикатов с указанием их местности называется *сигнатурой*. Для обозначения сигнатуры будем использовать символ Σ , навешивая на него в случае необходимости различные индексы.

Например,

$$\Sigma_1 = \{+^{(2)}, \cdot^{(2)}, <^{(2)}, 1^{(0)}\},$$

$$\Sigma_2 = \{F^{(2)}, G^{(2)}, P^{(2)}, c^{(0)}\},$$

$$\Sigma_3 = \{F_1^{(2)}, F_2^{(4)}, P^{(1)}\}.$$

Как Вы наверняка догадались, символы сигнатуры будут использоваться нами для записи формул логики первого порядка. В связи с этим сигнатуры Σ_1 и Σ_2 кажутся почти одинаковыми: они состоят из равного количества символов операций и предикатов одинаковой местности. Фактически не имеет значения, какой именно символ используется для обозначения операции или предиката: всё зависит от самого отображения или подмножества соответственно. Поэтому в дальнейшем мы не будем различать такие сигнатуры.

§2. Алгебраические системы

При изучении теории множеств, а также на некоторых лекциях по алгебре и теории чисел на первом курсе Вы познакомились с такими алгебраическими системами, как полугруппы, группы, кольца, поля, линейные пространства. Здесь мы абстрагируемся от элементов алгебраических систем и свойств операций, которые заданы в этих алгебраических системах. Структурные свойства групп, колец, линейных пространств (конкретных алгебраических систем) — это вопрос алгебры. В рамках математической логики мы будем вести речь об истинности формул в этих алгебраических системах.

Определение. Пара $\langle A; \Sigma \rangle$, где A — непустое множество, называется *алгебраической системой сигнатуры Σ* , если любому символу n -местной операции из Σ поставлена в соответствие n -местная операция на A и любому символу n -местного предиката из Σ поставлен в соответствие n -местный предикат на A . Операции и предикаты при этом называют *интерпретациями* сигнатурных символов, а множество A — *носителем* алгебраической системы $\langle A; \Sigma \rangle$.

Например, $\langle \mathbb{Z}; +^{(2)}, 0^{(0)} \rangle$, $\langle \mathbb{N}; \cdot^{(2)}, 1^{(0)} \rangle$, $\langle \mathbb{Q}; \cdot^{(2)}, \leq^{(2)} \rangle$ — алгебраические системы с носителями $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ соответственно.

Для обозначения алгебраических систем используют готический стиль букв латинского алфавита:

$$\mathfrak{A} = \langle A; \Sigma \rangle,$$

$$\mathfrak{B} = \langle B; \Sigma \rangle,$$

$$\mathfrak{C} = \langle C; \Sigma \rangle$$

и др. Трёх букв нам вполне хватит для записи утверждений и их доказательств, хотя все буквы в этом стиле выглядят красиво.

Определение. Алгебраическая система $\mathfrak{B} = \langle B; \Sigma \rangle$ называется *подсистемой* алгебраической системы $\mathfrak{A} = \langle A; \Sigma \rangle$ (обозначение: $\mathfrak{B} \leq \mathfrak{A}$), если $B \subseteq A$ и символы Σ интерпретируются в $\mathfrak{B}$ на элементах множества B так же, как в $\mathfrak{A}$.

Например, $\langle \mathbb{N}; +^{(2)}, <^{(2)} \rangle \leq \langle \mathbb{Z}; +^{(2)}, <^{(2)} \rangle$.

Определение. Пусть $\mathfrak{A} = \langle A; \Sigma \rangle$, $X \subseteq A$, $X \neq \emptyset$. Подсистемой системы $\mathfrak{A}$, порождённой множеством X , называется алгебраическая система $\mathfrak{B} = \langle B; \Sigma \rangle$ такая, что B — наименьшее относительно $\subseteq$ подмножество множества A , удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) $X \subseteq B$,
- 2) $\mathfrak{B} \leq \mathfrak{A}$.

Носитель подсистемы алгебраической системы $\mathfrak{A} = \langle A; \Sigma \rangle$, порождённой множеством $X \subseteq A$, будем обозначать через $A(X)$, саму подсистему — $\mathfrak{A}(X)$.

Рассмотрим пример. Пусть $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}; +^{(2)}, -^{(2)} \rangle$, $X = \{3\}$. Так как на $\mathbb{Z}$ определены операции сложения и вычитания, то носитель подсистемы, порождённой множеством X , должен содержать всевозможные суммы и разности элементов множества X . Очевидно, $3, 6, 0, -3, -6 \in \mathbb{Z}(X)$. Продолжая вычитать и складывать вновь получаемые числа с полученными ранее, мы будем получать числа, кратные 3. Следовательно, $3\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}(X)$. Нетрудно понять, что множество $3\mathbb{Z}$ удовлетворяет всем условиям определения. Следовательно, $\mathbb{Z}(X) = 3\mathbb{Z}$.

Упражнение 1. Найдите $\mathbb{Z}(X)$, где $X = \{-125, 635\}$.

Теорема 1. Пусть $\mathfrak{A} = \langle A; \Sigma \rangle$, $X \subseteq A$, $X \neq \emptyset$. Тогда

$$A(X) = \bigcap_{\substack{X \subseteq B \\ \langle B; \Sigma \rangle \leq \mathfrak{A}}} B.$$

Обратите внимание, как компактно выглядит запись теоремы, почти без слов. Находясь на данном этапе изучения математической логики, Вы должны с лёгкостью читать подобные записи, понимая их смысл с первого раза. ☺

Доказательство.

Пусть условие теоремы выполняется,

$$C = \bigcap_{\substack{X \subseteq B \\ \langle B; \Sigma \rangle \leq \mathfrak{A}}} B.$$

1. Очевидно, что $X \subseteq C$.

2. Покажем, что $\langle C; \Sigma \rangle \leq \mathfrak{A}$. Пусть $F^{(n)} \in \Sigma$, $c_1, \dots, c_n \in C$. Тогда $c_1, \dots, c_n \in B$ для любого B такого, что $X \subseteq B$ и $\langle B; \Sigma \rangle \leq \mathfrak{A}$. Следовательно, $F(c_1, \dots, c_n) \in B$ для любого B такого, что $X \subseteq B$ и $\langle B; \Sigma \rangle \leq \mathfrak{A}$. Поэтому $F(c_1, \dots, c_n) \in C$. Таким образом, символы Σ интерпретируются в $\langle C; \Sigma \rangle$ так же, как в $\mathfrak{A}$.

Покажем теперь, что C — наименьшее относительно $\subseteq$ подмножество множества A , удовлетворяющее условиям 1) и 2) определения. Пусть множество $C_1 \subseteq C$ также удовлетворяет условиям 1) и 2). По определению

$$C = C_1 \cap \dots,$$

т.е. $C \subseteq C_1$. Следовательно, $C_1 = C$ и C — наименьшее. $\square$

§3. Термы сигнатуры

Определение. Язык логики предикатов сигнатуры Σ (ЛП^Σ) состоит из следующих символов:

1) счётное множество символов переменных $\{v_i \mid i \in \omega\}$, элементы которого будем называть просто *переменными* и обозначать через x, y, z, u, v, w (возможно с индексами);

2) символы сигнатуры Σ ;

3) логические связки: $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$;

4) кванторы: $\exists, \forall$;

5) $=$;

6) $(,), , \cdot$.

Заметим, что язык ЛП^Σ зависит от Σ . Любую конечную последовательность символов языка ЛП^Σ будем называть *словом*.

Определение *терма сигнатуры Σ :*

1) любая переменная — это терм сигнатуры Σ ,

2) если $t_1, \dots, t_n$ — термы сигнатуры Σ , $F^{(n)} \in \Sigma$, то слово вида $F(t_1, \dots, t_n)$ является термом сигнатуры Σ .

Иногда кортеж переменных $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$, где $x_i \neq x_j$ для всех $i \neq j$, будем обозначать через $\bar{x}$. Множество переменных, входящих в терм t , будем обозначать через $FV(t)$ (от словосочетания *Free Variables*). Если $FV(t) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$, то в случае, когда в этом есть необходимость, вместо t будем писать $t(x_1, \dots, x_n)$ или $t(\bar{x})$.

Пусть, например, $\Sigma = \{+^{(2)}, \cdot^{(2)}, \leq^{(2)}, 1^{(0)}\}$. Так как переменные x и y являются термами, то слово $+(x, y)$ является термом. Договоримся для символов

стандартных операций и предикатов использовать стандартную запись, расставляя в случае необходимости скобки. Так, вместо $+(x, y)$ будем писать $x + y$. Слова

$$x \cdot y, \quad x \cdot y + y + z, \quad (x + y) \cdot z + 1$$

также являются термами сигнатуры Σ , а слова

$$x \cdot \cdot y, \quad x \leq y, \quad x - y, \quad x + 2$$

термами сигнатуры Σ не являются (почему?).

Определение значения терма $t(x_1, \dots, x_n)$ сигнатуры Σ в алгебраической системе $\mathfrak{A} = \langle A; \Sigma \rangle$ на наборе элементов $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in A^n$ (обозначение: $t^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)$):

- 1) если $t(x_1, \dots, x_n) \rightleftharpoons x_i$, где $i \leq n$, то $t^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) \stackrel{df}{=} a_i$;
- 2) если $t(x_1, \dots, x_n) \rightleftharpoons F(t_1(x_1, \dots, x_n), \dots, t_m(x_1, \dots, x_n))$, где $t_1, \dots, t_m$ — термы сигнатуры Σ , $F^{(m)} \in \Sigma$, то

$$t^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) \stackrel{df}{=} F(t_1^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n), \dots, t_m^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)).$$

Символ $\rightleftharpoons$ имеет значение, как и прежде, «имеет вид».

Например, если $\Sigma = \{+^{(2)}, \cdot^{(2)}, \leq^{(2)}, 1^{(0)}\}$, $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}; \Sigma \rangle$,

$$t(x, y, z) \rightleftharpoons ((x + y) \cdot z + 1) \cdot (x + z),$$

то $t^{\mathfrak{A}}(1, 2, 3) = 40$.

В дальнейшем для записи кортежа элементов $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in A^n$ будем иногда использовать обозначение $\bar{a}$. Вместо $\bar{a} \in A^n$ будем писать $\bar{a} \in A$.

Теорема 2. Пусть $\mathfrak{A} = \langle A; \Sigma \rangle$, $X \subseteq A$, $X \neq \emptyset$. Тогда

$$A(X) = \{t^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) \mid t(\bar{x}) \text{ — терм сигнатуры } \Sigma, \bar{a} \in X\}.$$

Доказательство.

Пусть

$$B = \{t^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) \mid t(\bar{x}) \text{ — терм сигнатуры } \Sigma, \bar{a} \in X\}.$$

Докажем, что $B = A(X)$.

1. Покажем, что $\langle B; \Sigma \rangle \leq \mathfrak{A}$. Пусть $F^{(n)} \in \Sigma$, $b_1, \dots, b_n \in B$. Тогда для любого $i \leq n$ имеем $b_i = t_i^{\mathfrak{A}}(\bar{a})$ для некоторого терма $t_i(\bar{x})$ сигнатуры Σ , $\bar{a} \in X$

(почему можно считать, что кортеж $\bar{x}$ переменных для всех термов t_i одинаков?). Обозначим через $t(\bar{x})$ терм $F(t_1(\bar{x}), \dots, t_n(\bar{x}))$. Тогда

$$F(b_1, \dots, b_n) = F(t_1^{\mathfrak{A}}(\bar{a}), \dots, t_n^{\mathfrak{A}}(\bar{a})) = t^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) \in B.$$

2. Пусть $t(x) \rightleftharpoons x$ — терм сигнатуры Σ . Тогда для любого $a \in X$

$$a = t^{\mathfrak{A}}(a) \in B,$$

т.е. $X \subseteq B$.

Покажем, что B — наименьшее относительно $\subseteq$ подмножество множества A , удовлетворяющее условиям 1 и 2. Пусть $\mathfrak{C} = \langle C; \Sigma \rangle \leq \mathfrak{A}$, $X \subseteq C$, $b \in B$. Тогда $b = t^{\mathfrak{A}}(\bar{a})$ для некоторого терма $t(\bar{x})$ сигнатуры Σ , $\bar{a} \in X$. Так как $\mathfrak{C} \leq \mathfrak{A}$, $\bar{a} \in X$ и $X \subseteq C$, то $t^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) \in C$. Следовательно, $B \subseteq C$. $\square$

Упражнение 2. Пусть $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Q} \setminus \{0\}; \cdot^{(2)}, \leq^{(2)} \rangle$, $X = \{-2, 2\}$. Найдите $\mathfrak{A}(X)$.

§4. Формулы сигнатуры

Определение. *Атомарной формулой сигнатуры Σ* называется выражение вида $t = g$ или $P(t_1, \dots, t_n)$, где $P^{(n)} \in \Sigma$, $t, g, t_1, \dots, t_n$ — термы Σ .

Например, если $\Sigma = \{+^{(2)}, \cdot^{(2)}, \leq^{(2)}, 1^{(0)}\}$, то слова

$$x + y = 1, \quad x \leq y, \quad x + y \leq (y + z) \cdot x + 1$$

являются атомарными формулами сигнатуры Σ .

Определение *формулы сигнатуры Σ :*

- 1) любая атомарная формула сигнатуры Σ — это формула Σ ,
- 2) если Φ, Ψ — формулы сигнатуры Σ , то $(\Phi \wedge \Psi)$, $(\Phi \vee \Psi)$, $(\Phi \rightarrow \Psi)$ — формулы сигнатуры Σ ,
- 3) если Φ — формула сигнатуры Σ , то $\neg(\Phi)$, $\exists x(\Phi)$, $\forall x(\Phi)$ — формулы сигнатуры Σ .

Например, если $\Sigma = \{+^{(2)}, \cdot^{(2)}, \leq^{(2)}, 1^{(0)}\}$, то слова

$$x + y = 1, \quad (\forall x(\neg(x + y = z)) \rightarrow \exists z(z \leq y))$$

являются формулами. Забегая вперёд, отметим, что логические связки несут тот же смысл, что и в алгебре высказываний. Поэтому для записи формул сигнатуры Σ будем аналогичным образом опускать скобки в случаях, когда «чтение» формул не вызывает трудностей. Тогда последнюю формулу можно записать более просто:

$$\forall x \neg(x + y = z) \rightarrow \exists z(z \leq y).$$

В дальнейшем под формулами будем понимать формулы зафиксированной в контексте сигнатуры, если не оговорено противное. Символ $=$ называется символом *равенства* или просто *равенством*. Символы $\exists$ и $\forall$ называются *кванторами существования* и *всеобщности* соответственно. Запись вида $\exists x\Phi$ читается как «существует x такой, что Φ », запись вида $\forall x\Phi$ читается как «для любого x имеет место Φ ». Формулу, не содержащую кванторов, будем называть *бескванторной*.

Определение. Подслово формулы Φ сигнатуры Σ , являющееся формулой сигнатуры Σ , называется *подформулой* формулы Φ .

Например, формула из примера выше

$$\forall x \neg(x + y = z) \rightarrow \exists z(z \leq y)$$

имеет следующие подформулы:

$$\begin{aligned} & x + y = z, \\ & \neg(x + y = z), \\ & \forall x \neg(x + y = z), \\ & z \leq y, \\ & \exists z(z \leq y), \\ & \forall x \neg(x + y = z) \rightarrow \exists z(z \leq y). \end{aligned}$$

Определение множества свободных переменных формулы Φ сигнатуры Σ (обозначение $FV(\Phi)$):

1) если $\Phi \Leftrightarrow t = g$ или $\Phi \Leftrightarrow P(t_1, \dots, t_n)$, где $t, g, t_1, \dots, t_n$ — термы сигнатуры Σ , $P^{(n)} \in \Sigma$, то $FV(\Phi) = FV(t) \cup FV(g)$ или $FV(\Phi) = FV(t_1) \cup \dots \cup FV(t_n)$ соответственно,

2) если $\Phi \Leftrightarrow \Psi \wedge \Theta$, $\Phi \Leftrightarrow \Psi \vee \Theta$ или $\Phi \Leftrightarrow \Psi \rightarrow \Theta$, где Ψ, Θ — формулы сигнатуры Σ , то $FV(\Phi) = FV(\Psi) \cup FV(\Theta)$,

3) если $\Phi \Leftrightarrow \neg\Psi$, $\Phi \Leftrightarrow \forall x\Psi$ или $\Phi \Leftrightarrow \exists x\Psi$, где Ψ — формула сигнатуры Σ , x — переменная, то $FV(\Phi) = FV(\Psi)$.

Вхождение переменной x в формулу Φ называется *связанным*, если существует подформула формулы Φ вида $Qx\Psi$, где Ψ — подформула формулы Φ , содержащая это вхождение, $x \in FV(\Psi)$, $Q \in \{\exists, \forall\}$. Вхождение переменной x в формулу Φ , не являющееся связанным, называется *свободным*.

Если $FV(\Phi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$, то вместо Φ иногда будем писать $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ или $\Phi(\bar{x})$, понимая под $\bar{x}$ кортеж переменных $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$.

Например, для формулы

$$\Phi \Leftrightarrow \forall x \neg(x + y = z) \rightarrow \exists z(z \leq y)$$

свободными будут переменные y, z , переменные x, z имеют связанное вхождение в Φ .

Определение. Формула без свободных переменных называется *замкнутой*, или *предложением*. В противном случае она называется *открытой*.

§5. Истинность формулы в алгебраической системе

Дадим определение одного из главных терминов этого раздела.

Определение. Для формулы $\Phi(\bar{x})$ сигнатуры Σ , алгебраической системы $\mathfrak{A} = \langle A; \Sigma \rangle$ и кортежа $\bar{a} \in A$ индукцией по сложности $\Phi(\bar{x})$ определим отношение $\mathfrak{A} \models \Phi(\bar{a})$ (запись читается как *формула Φ истинна в алгебраической системе $\mathfrak{A}$ на кортеже элементов $\bar{a}$*):

1) если $\Phi(\bar{x}) \Leftrightarrow t(\bar{x}) = g(\bar{x})$, где $t(\bar{x}), g(\bar{x})$ — термы сигнатуры Σ , то

$$\mathfrak{A} \models \Phi(\bar{a}) \stackrel{df}{\iff} t^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) = g^{\mathfrak{A}}(\bar{a});$$

2) если $\Phi(\bar{x}) \Leftrightarrow P(t_1(\bar{x}), \dots, t_n(\bar{x}))$, где $t_1(\bar{x}), \dots, t_n(\bar{x})$ — термы сигнатуры Σ , $P^{(n)} \in \Sigma$, то

$$\mathfrak{A} \models \Phi(\bar{a}) \stackrel{df}{\iff} \langle t_1^{\mathfrak{A}}(\bar{a}), \dots, t_n^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) \rangle \in P;$$

3) если $\Phi(\bar{x}) \Leftrightarrow \Psi(\bar{x}) \wedge \Theta(\bar{x})$, то

$$\mathfrak{A} \models \Phi(\bar{a}) \stackrel{df}{\iff} \mathfrak{A} \models \Psi(\bar{a}) \text{ и } \mathfrak{A} \models \Theta(\bar{a});$$

4) если $\Phi(\bar{x}) \Leftrightarrow \Psi(\bar{x}) \vee \Theta(\bar{x})$, то

$$\mathfrak{A} \models \Phi(\bar{a}) \stackrel{df}{\iff} \mathfrak{A} \models \Psi(\bar{a}) \text{ или } \mathfrak{A} \models \Theta(\bar{a});$$

5) если $\Phi(\bar{x}) \Leftrightarrow \neg \Psi(\bar{x})$, то

$$\mathfrak{A} \models \Phi(\bar{a}) \stackrel{df}{\iff} \text{неверно, что } \mathfrak{A} \models \Psi(\bar{a});$$

6) если $\Phi(\bar{x}) \Leftrightarrow \Psi(\bar{x}) \rightarrow \Theta(\bar{x})$, то

$$\mathfrak{A} \models \Phi(\bar{a}) \stackrel{df}{\iff} \text{неверно, что } \mathfrak{A} \models \Psi(\bar{a}), \text{ или } \mathfrak{A} \models \Theta(\bar{a});$$

7) если $\Phi(\bar{x}) \Leftrightarrow \exists y \Psi(y, \bar{x})$, то

$$\mathfrak{A} \models \Phi(\bar{a}) \stackrel{df}{\iff} \text{существует } b \in A \text{ такой, что } \mathfrak{A} \models \Phi(b, \bar{a});$$

8) если $\Phi(\bar{x}) \Leftrightarrow \forall y \Psi(y, \bar{x})$, то

$$\mathfrak{A} \models \Phi(\bar{a}) \stackrel{df}{\iff} \mathfrak{A} \models \Phi(b, \bar{a}) \text{ для любого } b \in A.$$

Заметим, что в пунктах 3) – 6) определение сводится к истинности высказываний, соединённых конъюнкцией, дизъюнкцией, отрицанием и импликацией соответственно. Если $\mathfrak{A} \not\models \Phi(\bar{a})$, то будем говорить, что Φ *ложна* в системе $\mathfrak{A}$ на наборе $\bar{a}$.

Пример 1. Пусть $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}; +^{(2)}, \cdot^{(2)} \rangle$, $\Phi(x) \Leftrightarrow x \cdot x = x$. Тогда

$$\mathfrak{A} \models \Phi(1), \quad \mathfrak{A} \not\models \Phi(2), \quad \mathfrak{A} \not\models \Phi(10).$$

Пример 2. Пусть $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{Z}; +^{(2)}, \cdot^{(2)} \rangle$, $\Phi(x) \Leftrightarrow x \cdot x = x \wedge \neg(x + x = x)$. Тогда

$$\mathfrak{B} \models \Phi(1), \quad \mathfrak{B} \not\models \Phi(0), \quad \mathfrak{B} \not\models \Phi(2).$$

Пример 3. Пусть $\mathfrak{C} = \langle \mathbb{N}; +^{(2)}, \leq^{(2)} \rangle$, $\Phi(x, y, z) \Leftrightarrow x + y \leq z$. Тогда

$$\mathfrak{C} \models \Phi(1, 2, 4), \quad \mathfrak{C} \not\models \Phi(3, 7, 5).$$

Пример 4. Пусть $\mathfrak{E} = \langle \mathbb{E}^2; P_1^{(1)}, P_2^{(1)}, P_3^{(2)} \rangle$, где $\mathbb{E}^2$ — множество точек и прямых некоторой плоскости,

$$a \in P_1 \xLeftrightarrow{df} a \text{ — точка,}$$

$$a \in P_2 \xLeftrightarrow{df} a \text{ — прямая,}$$

$$\langle a, b \rangle \in P_3 \xLeftrightarrow{df} a \text{ лежит на } b,$$

$$\Phi(x, y) \Leftrightarrow P_2(x) \wedge P_2(y) \wedge \forall z (P_1(z) \wedge P_3(z, x) \rightarrow \neg P_3(z, y)),$$

$$\Psi \Leftrightarrow \forall x \forall y (P_2(x) \wedge P_2(y) \rightarrow \exists z (P_1(z) \wedge P_3(z, x) \wedge P_3(z, y))).$$

Тогда

$$\mathfrak{E} \models \Phi(a, b) \Leftrightarrow a, b \text{ — параллельные прямые,}$$

$$\mathfrak{E} \models \Psi \Leftrightarrow \text{любые две прямые пересекаются.}$$

Упражнение 3. Для примеров 1 и 4

1) придумайте формулу $\Phi(x, y)$ сигнатуры $\{+^{(2)}, \cdot^{(2)}\}$ такую, что

$$\mathfrak{A} \models \Phi(a, b) \Leftrightarrow a : b;$$

2) придумайте формулу $\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ сигнатуры $\{P_1^{(1)}, P_2^{(1)}, P_3^{(2)}\}$ такую, что

$$\mathfrak{E} \models \Phi(a_1, a_2, a_3, a_4) \Leftrightarrow \text{точки } a_1, a_2, a_3, a_4$$

являются вершинами некоторого четырёхугольника.

§6. Равносильные формулы

Определение. Формулы $\Phi(\bar{x})$ и $\Psi(\bar{x})$ сигнатуры Σ называются *равносильными* (обозначение: $\Phi \equiv \Psi$), если для любой алгебраической системы $\mathfrak{A} = \langle A; \Sigma \rangle$ и любого кортежа $\bar{a} \in A$

$$\mathfrak{A} \models \Phi(\bar{a}) \iff \mathfrak{A} \models \Psi(\bar{a}).$$

Согласно определению истинность формулы Φ сигнатуры Σ зависит от истинности атомарных формул, которые являются подформулами Φ . В свою очередь истинность атомарных формул в алгебраической системе $\mathfrak{A} = \langle A; \Sigma \rangle$ зависит от значений входящих в них термов, что эквивалентно отношению между элементами множества A . На выражения вида $a = b$ и $P(a_1, \dots, a_n)$, где $a, b, a_1, \dots, a_n \in A$, $P^{(n)} \in \Sigma$, можно смотреть как на элементарные высказывания. Кроме того, символы $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow$ наделены тем же смыслом, что и в алгебре высказываний. Поэтому многие свойства формул алгебры высказываний естественным образом переносятся на свойства формул сигнатуры Σ . Например, верен следующий аналог теоремы ?? главы II (§4).

Теорема 3. Пусть Φ, Ψ, Θ — формулы сигнатуры Σ . Тогда имеют место следующие равносильности:

1. a) $\Phi \wedge \Phi \equiv \Phi$,
b) $\Phi \vee \Phi \equiv \Phi$.
2. a) $\Phi \wedge \Psi \equiv \Psi \wedge \Phi$,
b) $\Phi \vee \Psi \equiv \Psi \vee \Phi$.
3. a) $\Phi \wedge (\Psi \wedge \Theta) \equiv (\Phi \wedge \Psi) \wedge \Theta$,
b) $\Phi \vee (\Psi \vee \Theta) \equiv (\Phi \vee \Psi) \vee \Theta$.
4. a) $\Phi \wedge (\Psi \vee \Theta) \equiv (\Phi \wedge \Psi) \vee (\Phi \wedge \Theta)$,
b) $\Phi \vee (\Psi \wedge \Theta) \equiv (\Phi \vee \Psi) \wedge (\Phi \vee \Theta)$.
5. a) $\neg(\Phi \wedge \Psi) \equiv \neg\Phi \vee \neg\Psi$,
b) $\neg(\Phi \vee \Psi) \equiv \neg\Phi \wedge \neg\Psi$.
6. a) $\Phi \wedge (\Phi \vee \Psi) \equiv \Phi$,
b) $\Phi \vee (\Phi \wedge \Psi) \equiv \Phi$.
7. $\neg\neg\Phi \equiv \Phi$.
8. $\Phi \rightarrow \Psi \equiv \neg\Phi \vee \Psi$.

Доказательство.

Докажем 5 b). Пусть $\Phi(\bar{x}), \Psi(\bar{x})$ — формулы сигнатуры Σ , $\mathfrak{A} = \langle A; \Sigma \rangle$, $\bar{a} \in A$. Тогда

$$\mathfrak{A} \models \neg(\Phi(\bar{a}) \vee \Psi(\bar{a})) \xLeftrightarrow{\text{по опр}} \text{неверно, что } \mathfrak{A} \models \Phi(\bar{a}) \vee \Psi(\bar{a}) \xLeftrightarrow{\text{по опр}}$$

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \text{неверно, что } \mathfrak{A} \models \Phi(\bar{a}) \text{ или } \mathfrak{A} \models \Psi(\bar{a}) \xLeftrightarrow{\Gamma. \text{ II, T1, 5b}} \\
&\Longleftrightarrow \text{неверно, что } \mathfrak{A} \models \Phi(\bar{a}), \text{ и неверно, что } \mathfrak{A} \models \Psi(\bar{a}) \xLeftrightarrow{\text{по опр}} \\
&\Longleftrightarrow \mathfrak{A} \models \neg\Phi(\bar{a}) \text{ и } \mathfrak{A} \models \neg\Psi(\bar{a}) \xLeftrightarrow{\text{по опр}} \mathfrak{A} \models \neg\Phi(\bar{a}) \wedge \neg\Psi(\bar{a}).
\end{aligned}$$

Следовательно, $\neg(\Phi \vee \Psi) \equiv \neg\Phi \wedge \neg\Psi$. □

Теорема 4. Пусть Φ, Ψ — формулы сигнатуры Σ , $x \notin FV(\Psi)$. Тогда имеют место следующие равносильности:

1. a) $\neg\forall x\Phi \equiv \exists x\neg\Phi$,
b) $\neg\exists x\Phi \equiv \forall x\neg\Phi$.
2. a) $\forall x\Phi \wedge \Psi \equiv \forall x(\Phi \wedge \Psi)$,
b) $\forall x\Phi \vee \Psi \equiv \forall x(\Phi \vee \Psi)$.
3. a) $\exists x\Phi \wedge \Psi \equiv \exists x(\Phi \wedge \Psi)$,
b) $\exists x\Phi \vee \Psi \equiv \exists x(\Phi \vee \Psi)$.
4. a) $\forall x\Phi \equiv \forall y[\Phi]_y^x$,
b) $\exists x\Phi \equiv \exists y[\Phi]_y^x$,

где $[\Phi]_y^x$ — формула, получаемая заменой в формуле Φ свободного вхождения переменной x на новую переменную y .

Доказательство. Докажем 2 а). Пусть $\Phi(x, \bar{y}), \Psi(\bar{y})$ — формулы сигнатуры Σ , $\mathfrak{A} = \langle A; \Sigma \rangle$, $\bar{a} \in A$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{A} \models \forall x\Phi(x, \bar{a}) \wedge \Psi(\bar{a}) \xLeftrightarrow{\text{по опр}} \mathfrak{A} \models \forall x\Phi(x, \bar{a}) \text{ и } \mathfrak{A} \models \Psi(\bar{a}) \xLeftrightarrow{\text{по опр}} \\
&\Longleftrightarrow \text{для любого } b \in A \text{ верно } \mathfrak{A} \models \Phi(b, \bar{a}) \text{ и } \mathfrak{A} \models \Psi(\bar{a}) \xLeftrightarrow{\text{почему?}} \\
&\Longleftrightarrow \text{для любого } b \in A \text{ верно } (\mathfrak{A} \models \Phi(b, \bar{a}) \text{ и } \mathfrak{A} \models \Psi(\bar{a})) \xLeftrightarrow{\text{по опр}} \\
&\Longleftrightarrow \text{для любого } b \in A \text{ верно } \mathfrak{A} \models \Phi(b, \bar{a}) \wedge \Psi(\bar{a}) \xLeftrightarrow{\text{по опр}} \\
&\Longleftrightarrow \mathfrak{A} \models \forall x(\Phi(x, \bar{a}) \wedge \Psi(\bar{a})).
\end{aligned}$$

Следовательно, $\forall x\Phi \wedge \Psi \equiv \forall x(\Phi \wedge \Psi)$. □

Заметим, что $\exists x(\Phi \wedge \Psi) \equiv \exists x\Phi \wedge \exists x\Psi$ верно не для всех Φ и Ψ . Пусть $\Sigma = \{P_1^{(1)}, P_2^{(1)}\}$, $\mathfrak{A} = \langle A; \Sigma \rangle$, где A — множество всех животных планеты,

$$a \in P_1 \Longleftrightarrow a \text{ — кошка,}$$

$$a \in P_2 \Longleftrightarrow a \text{ — собака.}$$

Тогда

$$\mathfrak{A} \models \exists x(P_1(x) \wedge P_2(x)) \iff \text{существует животное,}$$

которое является и кошкой, и собакой одновременно,

$$\mathfrak{A} \models \exists x P_1(x) \wedge \exists x P_2(x) \iff \text{существует животное,}$$

которое является кошкой, и существует животное,

которое является собакой.

Очевидно, первое утверждение является ложным (Котопёс — вымышленный персонаж ☺), в то время как в истинности второго утверждения сомнений не возникает. Следовательно,

$$\exists x(P_1(x) \wedge P_2(x)) \not\equiv \exists x P_1(x) \wedge \exists x P_2(x).$$

Упражнение 4. Придумайте пример, показывающий, что

$$\forall x(\Phi \vee \Psi) \not\equiv \forall x\Phi \vee \forall x\Psi.$$

Теорема 5. Пусть Φ, Ψ — формулы сигнатуры Σ . Тогда имеют место следующие равносильности:

1. $\exists x(\Phi \vee \Psi) \equiv \exists x\Phi \vee \exists x\Psi$.
2. $\forall x(\Phi \wedge \Psi) \equiv \forall x\Phi \wedge \forall x\Psi$.

Лемма (о замене в ЛП). Пусть Φ — формула сигнатуры Σ , Ψ — подформула формулы Φ , $\Psi \equiv \Psi'$, формула Φ' получается из формулы Φ заменой подформулы Ψ на Ψ' . Тогда $\Phi \equiv \Phi'$.

Домашнее задание. Докажите теоремы 3 – 5 и лемму о замене.

В конце заметим, что порядок следования кванторов также играет существенную роль. Их нельзя перемешивать или вовсе опускать, так как истинность формул в некоторых алгебраических системах при этом может измениться. Например, пусть формула $\Phi(x, y)$ содержит информацию, суть которой при некоторой интерпретации сигнатурных символов в том, что x — парень и y — его девушка. Сравните формулы $\forall x \exists y \Phi(x, y)$ и $\exists y \forall x \Phi(x, y)$.

§7. Нормальные формы

В дальнейшем под формулами будем понимать формулы некоторой зафиксированной сигнатуры Σ .

Определение. *Элементарной дизъюнкцией* называется дизъюнкция атомарных формул и отрицаний атомарных формул. *Элементарной конъюнкцией* называется конъюнкция атомарных формул и отрицаний атомарных формул.

Примеры:

$(x = y) \vee (x < y)$ — элементарная дизъюнкция,

$(x = y) \vee \neg(x < y) \vee (y < x)$ — элементарная дизъюнкция,

$\neg(x = y) \wedge (x < y) \wedge (x = z + 1) \wedge \neg(z = x + y)$ — элементарная конъюнкция,

$x < z$ — и элементарная дизъюнкция, и элементарная конъюнкция,

$(x = y) \vee ((x < y) \wedge \neg(x > y))$ — не элементарная дизъюнкция и не элементарная конъюнкция.

Определение. *Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ)* формулы Φ называется дизъюнкция элементарных конъюнкций Ψ такая, что $\Phi \equiv \Psi$. *Конъюнктивной нормальной формой (КНФ)* формулы Φ называется конъюнкция элементарных дизъюнкций Ψ такая, что $\Phi \equiv \Psi$.

Заметим, что если в определениях элементарной дизъюнкции и элементарной конъюнкции заменить слова «атомарных формул» на слова «элементарных высказываний», то получатся в точности определения элементарной дизъюнкции и элементарной конъюнкции АВ соответственно. Не вдаваясь в подробности, отметим, что справедлива следующая

Теорема 6. *Для любой бескванторной формулы существует ДНФ (КНФ).*

Определение. *Предварённой нормальной формой* формулы Φ называется формула вида $Q_1x_1 \dots Q_nx_n\Psi$, где $Q_i \in \{\exists, \forall\}$ ($i \leq n$), Ψ не содержит кванторов и $\Phi \equiv Q_1x_1 \dots Q_nx_n\Psi$.

Теорема 7. *Для любой формулы существует предварённая нормальная форма.*

Доказательство (алгоритм построения).

Пусть Φ — формула сигнатуры Σ . Приведём схему алгоритма, основанного на [лемме о замене](#) и теоремах [3](#) – [5](#):

1. Избавимся от $\rightarrow$.
2. Пронесём $\neg$ до атомарных формул и избавимся от $\neg\neg$.

3. Вынесем кванторы.

Таким образом, предварённая нормальная форма формулы Φ построена. $\square$

Определение. *Пренексной нормальной формой (ПНФ) формулы Φ называется её предварённая нормальная форма, бескванторная часть которой находится в ДНФ.*

Примеры:

$\forall x \exists y (x = y + z) - \text{ПНФ},$

$\forall x \forall z ((x < z) \wedge \neg(x = y)) \vee (y \leq z) - \text{не ПНФ},$

$\forall x \forall z (((x < z) \wedge \neg(x = y)) \vee (y \leq z)) - \text{ПНФ}.$

Теоремы 6 и 7 приводят нас к следующему результату.

Теорема 8. *Для любой формулы существует ПНФ.*

Найдём ПНФ формулы

$$\forall x (x < y) \vee \exists y (x + 1 < y) \rightarrow \exists x \exists y (x - y = 1),$$

используя алгоритм:

$$\begin{aligned} & \forall x (x < y) \vee \exists y (x + 1 < y) \rightarrow \exists x \exists y (x - y = 1) \equiv \\ & \equiv \neg(\forall x (x < y) \vee \exists y (x + 1 < y)) \vee \exists x \exists y (x - y = 1) \equiv \\ & \equiv (\neg \forall x (x < y) \wedge \neg \exists y (x + 1 < y)) \vee \exists x \exists y (x - y = 1) \equiv \\ & \equiv (\exists x \neg(x < y) \wedge \forall y \neg(x + 1 < y)) \vee \exists x \exists y (x - y = 1) \equiv \\ & \equiv (\exists x_1 \neg(x_1 < y) \wedge \forall y_1 \neg(x + 1 < y_1)) \vee \exists x \exists y (x - y = 1) \equiv \\ & \equiv \exists x_1 \forall y_1 (\neg(x_1 < y) \wedge \neg(x + 1 < y_1)) \vee \exists x \exists y (x - y = 1) \equiv \\ & \equiv \exists x_1 \forall y_1 ((\neg(x_1 < y) \wedge \neg(x + 1 < y_1)) \vee \exists x \exists y (x - y = 1)) \equiv \\ & \equiv \exists x_1 \forall y_1 ((\neg(x_1 < y) \wedge \neg(x + 1 < y_1)) \vee \exists x_2 \exists y_2 (x_2 - y_2 = 1)) \equiv \\ & \equiv \exists x_1 \forall y_1 \exists x_2 \exists y_2 ((\neg(x_1 < y) \wedge \neg(x + 1 < y_1)) \vee (x_2 - y_2 = 1)). \end{aligned}$$

Определение. Формула $\Phi(\bar{x})$ сигнатуры Σ называется *выполнимой* (опровержимой), если существуют алгебраическая система $\mathfrak{A} = \langle A; \Sigma \rangle$ и набор $\bar{a} \in A$ такие, что $\mathfrak{A} \models \Phi(\bar{a})$ ($\mathfrak{A} \not\models \Phi(\bar{a})$).

Например, пусть $\Sigma = \{+^{(2)}, \leq^{(2)}\}$,

$$\Phi(x) \equiv (x + x = x) \wedge \forall y (x \leq y + x).$$

Так как $\langle \omega; \Sigma \rangle \models \Phi(0)$, то Φ выполнима. Так как $\langle \omega; \Sigma \rangle \not\models \Phi(1)$, то Φ опровержима.

Определение. Формула $\Phi(\bar{x})$ сигнатуры Σ называется *тождественно истинной* (*тождественно ложной*), если она истинна (ложна) во всех алгебраических системах сигнатуры Σ .

Заметим, что формула тождественно истинна (тождественно ложна) тогда и только тогда, когда она неопровержима (невыполнима).

Определение. Пусть Φ — формула сигнатуры Σ без свободных переменных. *Сколемовской нормальной формой* (*СНФ*) формулы Φ называется её предварённая нормальная форма, содержащая только кванторы $\forall$, бескванторная часть которой находится в КНФ.

Теорема 9. Для любой формулы Φ сигнатуры Σ существует замкнутая формула Ψ сигнатуры $\Sigma' \supseteq \Sigma$, находящаяся в СНФ, такая, что

$$\Phi \text{ выполнима} \iff \Psi \text{ выполнима}.$$

Доказательство.

Пусть $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ — формула сигнатуры Σ . По теоремам 6 и 7 существует её предварённая нормальная форма $\Phi'(x_1, \dots, x_n)$, бескванторная часть которой находится в КНФ. Навесим на все свободные переменные формулы Φ' кванторы существования и получим замкнутую формулу

$$\Phi'' \equiv \exists x_1 \dots \exists x_n \Phi'(x_1, \dots, x_n).$$

Если $\mathfrak{A} \models \Phi(\bar{a})$ для некоторых $\mathfrak{A} = \langle A; \Sigma \rangle$ и $\bar{a} \in A$, то $\mathfrak{A} \models \Phi''$. Обратно, если $\mathfrak{A} \models \Phi''$, то по определению истинности формулы, начинающейся с квантора $\exists$, существуют такие $\bar{a} \in A$, что $\mathfrak{A} \models \Phi(\bar{a})$. Следовательно,

$$\Phi \text{ выполнима} \iff \Phi'' \text{ выполнима}.$$

Пусть $\mathfrak{A} = \langle A; \Sigma \rangle$, $\mathfrak{A} \models \Phi''$, $\Sigma' = \Sigma$, $\Psi \equiv \Phi''$. Приведём алгоритм удаления кванторов $\exists$ из формулы Φ'' и построения расширенной сигнатуры $\Sigma' \supseteq \Sigma$.

Команда 1. Если существует такая переменная u , что

$$\Psi \equiv \forall u_1 \dots \forall u_k \exists u \Psi'(u_1, \dots, u_k, u)$$

для некоторых переменных $u_1, \dots, u_k$ ($k \in \omega$), то перейдём к команде 2. В противном случае завершим алгоритм — формула Ψ находится в СНФ.

Команда 2. Пусть F — символ k -местной операции, $F^{(k)} \notin \Sigma'$,

$$\Theta \equiv \forall u_1 \dots \forall u_k \Psi'(u_1, \dots, u_k, F(u_1, \dots, u_k)).$$

Определим операцию F на множестве A следующим образом:

$$F(a_1, \dots, a_k) = a \implies \mathfrak{A} \models \Psi'(a_1, \dots, a_k, a)$$

для любых $a_1, \dots, a_k, a \in A$. Вообще говоря, для набора $a_1, \dots, a_k \in A$ может существовать несколько элементов $a \in A$ таких, что $\mathfrak{A} \models \Psi'(a_1, \dots, a_k, a)$ — в этом случае выберем один из них. Перейдём к команде 3.

Команда 3. Пусть $\Sigma' := \Sigma \cup \{F^{(k)}\}$, $\Psi : \Leftarrow \Theta$. Перейдём к команде 1.

В результате получена замкнутая формула Ψ , находящаяся в СНФ.

Определим алгебраическую систему $\mathfrak{A}' = \langle A; \Sigma' \rangle$. Символы из Σ проинтерпретируем в $\mathfrak{A}'$ так же, как в $\mathfrak{A}$. Новые символы операций из $\Sigma' \setminus \Sigma$ проинтерпретируем соответствующими операциями, определёнными при выполнении команды 2. Очевидно, что $\mathfrak{A}' \models \Psi$.

Пусть $\mathfrak{B}' = \langle B; \Sigma' \rangle$, $\mathfrak{B}' \models \Psi$. Нетрудно понять, что $\mathfrak{B}' \models \Phi''$. Так формула Φ'' не содержит символов из $\Sigma' \setminus \Sigma$, то $\mathfrak{B} \models \Phi''$, где $\mathfrak{B} = \langle B; \Sigma \rangle$ и символы из Σ проинтерпретированы в $\mathfrak{B}$ так же, как в $\mathfrak{B}'$.

Таким образом,

$$\Phi'' \text{ выполнима} \iff \Psi \text{ выполнима.}$$

Теорема доказана. □

Алгоритм удаления кванторов $\exists$, описанный в доказательстве теоремы, называется *сколемизацией*.

Рассмотрим примеры сколемизации формул:

$$\exists x \forall y \forall z \Phi(x, y, z) \Rightarrow \forall y \forall z \Phi(c, y, z),$$

$$\exists x \forall y \exists z \forall u \Phi(x, y, z, u) \Rightarrow \forall y \exists z \forall u \Phi(c, y, z, u) \Rightarrow \forall y \forall u \Phi(c, y, F(y), u),$$

$$\exists x \exists y \forall z \forall u \exists v \Phi(x, y, z, u, v) \Rightarrow \exists y \forall z \forall u \exists v \Phi(c_1, y, z, u, v) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall z \forall u \exists v \Phi(c_1, c_2, z, u, v) \Rightarrow \forall z \forall u \Phi(c_1, c_2, z, u, F(z, u)),$$

$$\forall x \exists y \forall z \exists u \exists v \Phi(x, y, z, u, v) \Rightarrow \forall x \forall z \exists u \exists v \Phi(x, F_1(x), z, u, v) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall x \forall z \exists v \Phi(x, F_1(x), z, F_2(x, z), v) \Rightarrow \forall x \forall z \Phi(x, F_1(x), z, F_2(x, z), F_3(x, z)).$$

Рассмотрим ещё пример. Пусть $\Sigma = \{+^{(2)}, <^{(2)}\}$, $\Phi(x) \Leftarrow \forall y \exists z (x + y < z)$.

Формула Φ выполнима: $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}; \Sigma \rangle \models \Phi(0)$. Найдём для неё выполнимую формулу Ψ , находящуюся в СНФ, пользуясь сколемизацией. Навесим на свободную переменную x квантор существования:

$$\Phi'' \Leftarrow \exists x \forall y \exists z (x + y < z).$$

Двигаясь по кванторам слева направо, удалим все кванторы $\exists$. Так как слева от $\exists x$ нет кванторов всеобщности, то добавим в сигнатуру новый символ 0-местной операции, т.е. константу c , и заменим все вхождения переменной x на c :

$$\Psi \Leftrightarrow \forall y \exists z (c + y < z).$$

Так как слева от $\exists z$ есть один квантор всеобщности $\forall y$, то добавим в сигнатуру новый символ 1-местной операции F и заменим все вхождения переменной z на терм $F(y)$:

$$\Psi \Leftrightarrow \forall y (c + y < F(y)).$$

Полученная формула находится в СНФ, $\Sigma' = \{+^{(2)}, <^{(2)}, c^{(0)}, F^{(1)}\}$.

Покажем, что Ψ выполнима, используя доказательство [теоремы 9](#). Зная, что $\mathfrak{A} \models \Phi(0)$, проинтерпретируем константу c как 0. Интерпретацию символа F нужно задать таким образом, чтобы $a < F(a)$ для любого $a \in \mathbb{Z}$. Естественным образом напрашивается вариант $F(a) = a + 1$. В результате

$$\mathfrak{A}' = \langle \mathbb{Z}; \Sigma' \rangle \models \forall y (c + y < F(y)).$$

Обратно, пусть $\mathfrak{B}' = \langle 2\mathbb{N}; \Sigma' \rangle$, $c^{\mathfrak{B}'} = 2$, $F(n) = 4n$. Так как $2 + n < 4n$ для любого $n \in 2\mathbb{N}$, то

$$\mathfrak{B}' \models \forall y (c + y < F(y)).$$

Для любого $a \in B$ существует $b = F(a) \in 2\mathbb{N}$ такой, что $\mathfrak{B}' \models c + a < b$, поэтому по определению

$$\mathfrak{B}' \models \forall y \exists z (c + y < z).$$

Следовательно, по определению истинности формулы, начинающейся с квантора существования,

$$\mathfrak{B}' \models \exists x \forall y \exists z (x + y < z).$$

Так как в записи формулы $\exists x \forall y \exists z (x + y < z)$ не используются символы c и F , то

$$\mathfrak{B} = \langle 2\mathbb{N}; \Sigma \rangle \models \exists x \forall y \exists z (x + y < z).$$

Тогда найдётся такой $a \in 2\mathbb{N}$, что

$$\mathfrak{B} \models \forall y \exists z (a + y < z),$$

т.е. $\mathfrak{B} \models \Phi(a)$ и Φ выполнима.

§8. Логическое следствие в ЛП

Определение. Формула $\Phi(\bar{x})$ сигнатуры Σ называется *логическим следствием* формул $\Psi_1(\bar{x}), \dots, \Psi_k(\bar{x})$ сигнатуры Σ , если для любой алгебраической системы $\mathfrak{A} = \langle A; \Sigma \rangle$ и любого $\bar{a} \in A$

$$\mathfrak{A} \models \Psi_1(\bar{a}), \dots, \mathfrak{A} \models \Psi_k(\bar{a}) \implies \mathfrak{A} \models \Phi(\bar{a}).$$

Определение. Множество формул $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ сигнатуры Σ называется *несовместным*, если $\bigwedge_{i \leq n} \Phi_i$ — тождественно ложная формула.

Будем использовать те же обозначения, что и в алгебре высказываний. Если формула Φ является логическим следствием формул $\Psi_1, \dots, \Psi_k$, то будем писать $\Psi_1, \dots, \Psi_k \models \Phi$. Тождественно истинную формулу Φ будем обозначать через $\models \Phi$. Если $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ — несовместное множество формул, то будем писать $\Phi_1, \dots, \Phi_n \models$.

Теорема 10. Пусть $\Psi_1, \dots, \Psi_k, \Phi$ — формулы сигнатуры Σ . Следующие условия эквивалентны:

1. $\Psi_1, \dots, \Psi_k \models \Phi$.
2. $\Psi_1, \dots, \Psi_{k-1} \models \Psi_k \rightarrow \Phi$.
3. $\models \Psi_1 \rightarrow (\Psi_2 \rightarrow (\dots \rightarrow (\Psi_k \rightarrow \Phi) \dots))$.
4. $\Psi_1 \wedge \dots \wedge \Psi_k \models \Phi$.
5. $\models \Psi_1 \wedge \dots \wedge \Psi_k \rightarrow \Phi$.
6. $\Psi_1, \dots, \Psi_k, \neg \Phi \models$.
7. $\Psi_1 \wedge \dots \wedge \Psi_k \wedge \neg \Phi \models$.

Доказательство. Докажем $6 \Rightarrow 2$. Пусть $\mathfrak{A} = \langle A; \Sigma \rangle$, $\bar{a} \in A$ и $\mathfrak{A} \models \Psi_1(\bar{a}), \dots, \mathfrak{A} \models \Psi_{k-1}(\bar{a})$. Нужно показать, что $\mathfrak{A} \models \Psi_k(\bar{a}) \rightarrow \Phi(\bar{a})$. Предположим, что $\mathfrak{A} \models \Psi_k(\bar{a})$. Так как $\Psi_1, \dots, \Psi_k, \neg \Phi$ — несовместное множество формул, то $\mathfrak{A} \models \neg \neg \Phi(\bar{a})$. Следовательно, $\mathfrak{A} \models \Phi(\bar{a})$. Поэтому $\mathfrak{A} \models \Psi_k(\bar{a}) \rightarrow \Phi(\bar{a})$. $\square$

Домашнее задание. Докажите [теорему 10](#).

Рассмотрим пример. Проверим, верно ли

$$\Phi(x, \bar{y}), \forall x (\Phi(x, \bar{y}) \rightarrow \Psi(x, \bar{y})) \models \exists x \Psi(x, \bar{y})$$

для любых формул $\Phi(x, \bar{y}), \Psi(x, \bar{y})$ некоторой сигнатуры Σ , двумя способами — по определению и по [теореме 10](#).

1. Пусть $\mathfrak{A} = \langle A; \Sigma \rangle$, $a, \bar{b} \in A$.

$$\mathfrak{A} \models \forall x (\Phi(x, \bar{b}) \rightarrow \Psi(x, \bar{b})) \implies \mathfrak{A} \models \Phi(a, \bar{b}) \rightarrow \Psi(a, \bar{b}) \left. \vphantom{\mathfrak{A} \models \forall x (\Phi(x, \bar{b}) \rightarrow \Psi(x, \bar{b}))} \right\} \implies \mathfrak{A} \models \Phi(a, \bar{b})$$

$$\implies \mathfrak{A} \models \Psi(a, \bar{b}) \implies \mathfrak{A} \models \exists x \Psi(x, \bar{b}).$$

2. Воспользуемся эквивалентностью пунктов 1 и 7 [теоремы 10](#).

$$\begin{aligned} & \Phi(x, \bar{y}) \wedge \forall x (\Phi(x, \bar{y}) \rightarrow \Psi(x, \bar{y})) \wedge \neg \exists x \Psi(x, \bar{y}) \equiv \\ & \equiv \Phi(x, \bar{y}) \wedge \forall x (\neg \Phi(x, \bar{y}) \vee \Psi(x, \bar{y})) \wedge \forall x \neg \Psi(x, \bar{y}) \equiv \\ & \equiv \Phi(x, \bar{y}) \wedge \forall x ((\neg \Phi(x, \bar{y}) \vee \Psi(x, \bar{y})) \wedge \neg \Psi(x, \bar{y})) \equiv \\ & \equiv \Phi(x, \bar{y}) \wedge \forall x (\neg \Phi(x, \bar{y}) \wedge \neg \Psi(x, \bar{y})) \equiv \\ & \equiv \forall u (\Phi(x, \bar{y}) \wedge \neg \Phi(u, \bar{y}) \wedge \neg \Psi(u, \bar{y})). \end{aligned}$$

Предположим, что существуют такие $\mathfrak{A} = \langle A; \Sigma \rangle$ и $a, \bar{b} \in A$, что

$$\mathfrak{A} \models \forall u (\Phi(a, \bar{b}) \wedge \neg \Phi(u, \bar{b}) \wedge \neg \Psi(u, \bar{b})).$$

Тогда

$$\mathfrak{A} \models \Phi(a, \bar{b}) \wedge \neg \Phi(a, \bar{b}) \wedge \neg \Psi(a, \bar{b})$$

— противоречие. Следовательно,

$$\Phi(x, \bar{y}), \forall x (\Phi(x, \bar{y}) \rightarrow \Psi(x, \bar{y})), \neg \exists x \Psi(x, \bar{y}) \models .$$

Таким образом,

$$\Phi(x, \bar{y}), \forall x (\Phi(x, \bar{y}) \rightarrow \Psi(x, \bar{y})) \models \exists x \Psi(x, \bar{y}).$$

Следующей нашей целью является перенос метода резолюций из алгебры высказываний в логику предикатов. Метод резолюций в логике предикатов почти не отличается от метода резолюций в алгебре высказываний. Для начала мы познакомимся с некоторыми инструментами, которые позволят нам подготовить формулы к дальнейшему взятию резольвент. На этапе подготовки формул необходимо быть очень внимательным и контролировать каждый свой шаг, чтобы не получить новые формулы и не потерять имеющиеся.

§9. Подстановки формул

Определение. *Подстановкой сигнатуры Σ называется множество выражений вида*

$$\{t_1/x_1, \dots, t_n/x_n\},$$

где $n \in \omega$, $x_1, \dots, x_n$ — различные переменные и t_i — терм сигнатуры Σ , отличный от x_i ($i \leq n$). Если $n = 0$, то подстановка $\emptyset$ называется *пустой*.

Для обозначения подстановок будем использовать строчные буквы греческого алфавита — $\eta, \xi, \theta, \sigma$ (возможно с индексами). Пустую подстановку будем обозначать через ε .

Например, множество $\{x_2 \cdot x_3/x_1, x_3/x_2\}$ является подстановкой сигнатуры $\Sigma = \{.(2), <(2)\}$, а множество $\{x_1 < x_2/x_3\}$ подстановкой сигнатуры Σ не является.

Если $\sigma = \{t_1/x_1, \dots, t_n/x_n\}$ — подстановка сигнатуры Σ , Φ — элементарная дизъюнкция сигнатуры Σ , то через $\Phi\sigma$ будем обозначать формулу, получаемую из Φ одновременной заменой переменной x_i на терм t_i для всех $i \leq n$. Аналогично через $t\sigma$ будем обозначать терм, получаемый такой заменой из термина t сигнатуры Σ .

Например, пусть $\Sigma = \{F^{(1)}, G^{(1)}, P^{(3)}, R^{(1)}\}$,

$$\sigma = \{F(x_2)/x_1, c/x_2, G(x_2)/x_3\},$$

$$t \Leftrightarrow G(x_3),$$

$$\Phi \Leftrightarrow P(x_1, x_2, x_3) \vee \neg R(F(x_2)).$$

Тогда

$$t\sigma \Leftrightarrow G(G(x_2)),$$

$$\Phi\sigma \Leftrightarrow P(F(x_2), c, G(x_2)) \vee \neg R(F(c)).$$

Обратите внимание: несмотря на то что в подстановке σ есть элемент c/x_2 , в $t\sigma$ и $\Phi\sigma$ переменная x_2 всё равно присутствует. Замена переменной x_2 на терм c в $G(G(x_2))$ и $P(F(x_2), c, G(x_2)) \vee \neg R(F(c))$ была бы уже заменой после замены.

«Применение» подстановки к формулам можно рассматривать как преобразование множества всех формул фиксированной сигнатуры. Последовательное применение (или, как чаще говорят, композиция) преобразований также является преобразованием множества. Поэтому на множестве всех подстановок фиксированной сигнатуры можно ввести двухместную операцию.

Определение. Пусть $\xi = \{t_1/x_1, \dots, t_k/x_k\}$, $\eta = \{g_1/y_1, \dots, g_n/y_n\}$ — подстановки сигнатуры Σ . *Произведением, или композицией, подстановок ξ и η* (обозначение: $\xi\eta$) называется подстановка, получаемая из множества

$$\{t_1\eta/x_1, \dots, t_k\eta/x_k, g_1/y_1, \dots, g_n/y_n\}$$

удалением элементов вида x_i/x_i ($i \leq k$) и g_j/y_j , если $y_j \in \{x_1, \dots, x_k\}$ ($j \leq n$).

Рассмотрим пример. Пусть $\xi = \{F(y)/x, y/z, G(d)/u\}$, $\eta = \{c/x, z/y\}$ — подстановки некоторой сигнатуры Σ , $\Phi \Leftrightarrow R(x, y, z) \vee P(u)$ — формула сигнатуры Σ . Убедимся, что $\Phi\xi\eta \Leftrightarrow (\Phi\xi)\eta$. Найдём произведение ξ и η :

$$\xi\eta = \{F(z)/x, \cancel{z}/\cancel{z}, G(d)/u, \cancel{c}/\cancel{x}, z/y\} = \{F(z)/x, G(d)/u, z/y\}.$$

Тогда

$$\Phi\xi\eta \Leftrightarrow R(F(z), z, z) \vee P(G(d)),$$

$$\Phi\xi \Leftrightarrow R(F(y), y, y) \vee P(G(d)),$$

$$(\Phi\xi)\eta \Leftrightarrow R(F(z), z, z) \vee P(G(d)).$$

Таким образом, $\Phi\xi\eta \Leftrightarrow (\Phi\xi)\eta$.

Упражнение 5. Проверьте, верно ли $\Phi\xi\eta \Leftrightarrow \Phi\eta\xi$ для формулы Φ и подстановок ξ, η из примера выше.

Упражнение 6. Докажите, что множество всех подстановок сигнатуры Σ относительно произведения образует полугруппу. Является ли эта полугруппа группой?

§10. Унификация формул

Определение. Пусть $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ — атомарные формулы сигнатуры Σ , которые либо начинаются с одного и того же предикатного символа, либо имеют вид равенства термов (формулы $t = g$ и $g = t$, где t, g — термы сигнатуры Σ , будем считать одинаковыми для метода резолюций в ЛП). Подстановка σ сигнатуры Σ называется *унификатором* множества $\{\Phi_1, \dots, \Phi_n\}$, если $\Phi_1\sigma \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \Phi_n\sigma$. Множество формул, для которого существует унификатор, называется *унифицируемым*.

Например, подстановка $\sigma = \{x/y, F(x)/z, c/u\}$ является унификатором для множества формул $\Phi_1 \Leftrightarrow P(c, x, F(x))$ и $\Phi_2 \Leftrightarrow P(u, y, z)$:

$$\Phi_1\sigma \Leftrightarrow P(c, x, F(x)), \quad \Phi_2\sigma \Leftrightarrow P(c, x, F(x)).$$

Множество формул $\{R(x, F(x)), R(u, u)\}$ не унифицируемо (почему?).

Подстановка σ не единственный унификатор для множества $\{\Phi_1, \Phi_2\}$ из примера выше. Например, подстановка $\theta = \{y/x, F(y)/z, c/u\}$ также является унификатором. Счётное множество переменных в языке обеспечивает бесконечное множество унификаторов для унифицируемого множества формул. Такая неопределённость неудобна на практике: какой именно унификатор брать и нет ли унификатора, состоящего из меньшего количества элементов («замен»), чем подобранный? Оказывается, среди всех унификаторов унифицируемого множества формул можно выделить достаточно простой, который мы и будем использовать на практике.

Определение. Унификатор σ множества атомарных формул называется *наиболее общим унификатором (НОУ)*, если для любого унификатора η этого множества существует подстановка ξ такая, что $\eta = \sigma\xi$.

Рассмотрим пример. Пусть $\Phi_1 \Leftarrow P(x, F(c), G(z))$, $\Phi_2 \Leftarrow P(F(d), y, v)$. Легко проверить, что подстановка $\eta = \{F(d)/x, F(c)/y, u/z, G(u)/v\}$ является унификатором для $\{\Phi_1, \Phi_2\}$. Последние два элемента в η можно заменить одним. Подстановка $\sigma = \{F(d)/x, F(c)/y, G(z)/v\}$ также является унификатором для $\{\Phi_1, \Phi_2\}$, причём $\eta = \sigma\{u/z\}$. Покажем, что σ — НОУ. Можно рассматривать только такие унификаторы, которые состоят из элементов t/w , где t — терм, $w \in \{x, y, z, u\}$ (в противном случае такой унификатор не является НОУ). Ясно, что в формуле Φ_2 никак не избавиться от терма $F(d)$, так как он не содержит переменных. Следовательно, любой унификатор должен заменить переменную x на терм $F(d)$. Аналогичным образом получим, что любой унификатор должен заменить переменную y на $F(c)$. Так как замена переменных на термы происходит одновременно, то любой унификатор множества $\{\Phi_1, \Phi_2\}$ содержит элементы $F(d)/x$ и $F(c)/y$. Нетрудно понять, что если унификатор ξ множества $\{\Phi_1, \Phi_2\}$ содержит элемент t/z , где t — терм, то ξ содержит элемент $G(t)/v$ и $\xi = \sigma\{t/z\}$. Если $t/z \notin \xi$ для любого терма t , то $\xi = \sigma$. Таким образом, σ — НОУ множества $\{\Phi_1, \Phi_2\}$.

Мы нашли НОУ для двух формул, приведя достаточно много рассуждений. Доказать, что найденный перебором унификатор является НОУ, может оказаться непростой и трудоёмкой задачей. Облегчить поиск НОУ позволяет метод унификации.

Определение. Пусть $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ — атомарные формулы сигнатуры Σ , которые либо начинаются с одного и того же предикатного символа, либо имеют вид равенства термов. *Множеством рассогласований* множества $\{\Phi_1, \dots, \Phi_n\}$ называется множество термов $\{t_1, \dots, t_n\}$ такое, что t_i содержится в Φ_i и t_i начинается с символа, стоящего на первой слева позиции в Φ_i , на которой не для всех формул $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ стоит один и тот же символ ($i \leq n$).

Например, формулы

$$\Phi_1 \Leftarrow P(x, F(y), d), \quad \Phi_2 \Leftarrow P(x, y, G(u)), \quad \Phi_3 \Leftarrow P(x, c, v)$$

начинают отличаться с пятого символа. Следовательно, множеством рассогласований множества $\{\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3\}$ является $\{F(y), y, c\}$.

Приведём *алгоритм унификации* множества формул $\Gamma = \{\Phi_1, \dots, \Phi_n\}$.

Пусть $E = \Gamma$.

Команда 1. Пусть M — множество рассогласований множества E . Если $M = \emptyset$, то перейти к команде 5, иначе к команде 2.

Команда 2. Если существует переменная $x \in M$ и терм $t \in M$, не содержащий x , то перейти к команде 3. В противном случае завершить работу алгоритма — множество Γ не унифицируемо.

Команда 3. Пусть $\sigma = \{t/x\}$, $\Psi_i \Leftarrow \Phi_i \sigma$ ($i \leq n$). Перейти к команде 4.

Команда 4. Пусть $E := \{\Psi_1, \dots, \Psi_n\}$. Перейти к команде 1.

Команда 5. Закончить алгоритм — множество Γ унифицировано.

Если Γ унифицируемо, то НОУ для Γ есть произведение всех подстановок σ в порядке появления в алгоритме.

Рассмотрим работу алгоритма на примерах.

Пример 1. Выясним, унифицируемо ли множество формул $\Gamma = \{\Phi_1, \Phi_2\}$, где $\Phi_1 \Leftarrow P(c, F(x), G(x, y))$, $\Phi_2 \Leftarrow P(u, y, G(F(c), y))$. Полагаем $E = \Gamma$.

шаг	команда	выполнение
1	1	$M = \{c, u\}$
2	2	терм c не содержит переменной u
3	3	$\sigma_1 = \{c/u\}$ $\Psi_1 \Leftarrow P(c, F(x), G(x, y))$ $\Psi_2 \Leftarrow P(c, y, G(F(c), y))$
4	4	$E := \{\Psi_1, \Psi_2\}$
5	1	$M = \{F(x), y\}$
6	2	терм $F(x)$ не содержит переменной y
7	3	$\sigma_2 = \{F(x)/y\}$ $\Psi_1 \Leftarrow P(c, F(x), G(x, F(x)))$ $\Psi_2 \Leftarrow P(c, F(x), G(F(c), F(x)))$
8	4	$E := \{\Psi_1, \Psi_2\}$
9	1	$M = \{F(c), x\}$
10	2	терм $F(c)$ не содержит переменной x
11	3	$\sigma_3 = \{F(c)/x\}$ $\Psi_1 \Leftarrow P(c, F(F(c)), G(F(c), F(F(c))))$ $\Psi_2 \Leftarrow P(c, F(F(c)), G(F(c), F(F(c))))$
12	4	$E := \{\Psi_1, \Psi_2\}$
13	1	$M = \emptyset$
14	5	множество Γ унифицировано

НОУ для Γ :

$$\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = \{c/u\} \{F(x)/y\} \{F(c)/x\} =$$

$$= \{c/u, F(x)/y\} \{F(c)/x\} = \{c/u, F(F(c))/y, F(c)/x\}.$$

Пример 2. Выясним, унифицируемо ли множество формул $\Gamma = \{\Phi_1, \Phi_2\}$, где $\Phi_1 \Leftarrow P(F_1(c), F_2(x))$, $\Phi_2 \Leftarrow P(y, y)$. Полагаем $E = \Gamma$.

шаг	команда	выполнение
1	1	$M = \{F_1(c), y\}$
2	2	терм $F_1(c)$ не содержит переменной y
3	3	$\sigma_1 = \{F_1(c)/y\}$ $\Psi_1 \Leftarrow P(F_1(c), F_2(x))$ $\Psi_2 \Leftarrow P(F_1(c), F_1(c))$

шаг	команда	выполнение
4	4	$E := \{\Psi_1, \Psi_2\}$
5	1	$M = \{F_2(x), F_1(c)\}$
6	2	M не содержит переменных множество Γ не унифицируемо

§11. Понятие резолютивного вывода в ЛП

Определение. Пусть $\Phi \Leftarrow \Psi_1 \vee \dots \vee \Psi_n \vee \Theta$ ($\Phi \Leftarrow \neg\Psi_1 \vee \dots \vee \neg\Psi_n \vee \Theta$), где Θ — элементарная дизъюнкция, Ψ_i ($i \leq n$) — атомарные формулы сигнатуры Σ . Если существует НОУ σ для множества формул $\{\Psi_1, \dots, \Psi_n\}$, то формула $\Psi_1\sigma \vee \Theta\sigma$ ($\neg\Psi_1\sigma \vee \Theta\sigma$) называется *склежкой дизъюнкта* Φ .

Например, пусть $\Phi \Leftarrow \neg(x > y + 1) \vee \neg(1 + z > u)$. Тогда $\neg(1 + z > y + 1)$ — склейка Φ .

Определение. Пусть элементарные дизъюнкции Φ_1 и Φ_2 не имеют общих переменных, $\Phi_1 \Leftarrow \Psi_1 \vee \Theta_1$, $\Phi_2 \Leftarrow \neg\Psi_2 \vee \Theta_2$, где Ψ_1, Ψ_2 — атомарные формулы, имеющие НОУ σ . *Бинарной резольвентой формул Φ_1 и Φ_2* называется формула $\Theta_1\sigma \vee \Theta_2\sigma$.

Замечание. Вообще говоря, Θ_1 или (и) Θ_2 в формулах Φ_1 и Φ_2 могут отсутствовать. В этом случае в определении бинарной резольвенты отсутствует Θ_1 или (и) Θ_2 соответственно. В случае, когда $\Phi \Leftarrow \Psi_1$ и $\Phi_2 \Leftarrow \neg\Psi_2$, под бинарной резольвентой формул Φ_1 и Φ_2 будем понимать тождественно ложную формулу, которую будем обозначать через $\emptyset$ и называть *пустым дизъюнктом*.

Определение. Пусть Φ, Ψ — элементарные дизъюнкции, формулы Φ', Ψ' получаются из формул Φ, Ψ соответственно заменой общих переменных на новые различные переменные. *Резольвентой дизъюнктов Φ и Ψ* (обозначение: $\text{res}(\Phi, \Psi)$) называется одна из следующих бинарных резольвент:

- 1) бинарная резольвента Φ' и Ψ' ,
- 2) бинарная резольвента Φ' и склейки Ψ' ,
- 3) бинарная резольвента склейки Φ' и Ψ' ,
- 4) бинарная резольвента склейки Φ' и склейки Ψ' .

Рассмотрим пример. Пусть

$$\Phi \Leftarrow \neg(x + 1 \leq y) \vee x = y + u \vee v = y + (v + 1),$$

$$\Psi \Leftarrow y \leq x \vee \neg(y + 1 = z).$$

В формуле Ψ заменим переменные x и y на новые:

$$\Psi' \Leftarrow y_1 \leq x_1 \vee \neg(y_1 + 1 = z).$$

Для формулы Φ можно получить склейку:

$$\Phi' \Leftrightarrow \Phi\{v/x, v+1/u\} \equiv \neg(v+1 \leq y) \vee v = y + (v+1).$$

Тогда

$$\text{res}(\Phi, \Psi) \Leftrightarrow v = y + (v+1) \vee \neg((v+1) + 1 = z).$$

Заметим, что резольвенту можно было брать по другим атомарным формулам.

Определение. Последовательность формул $\Psi_1, \dots, \Psi_m$ называется *резольтивным выводом* формулы Φ из множества $\{\Phi_1, \dots, \Phi_n\}$ элементарных дизъюнкций, если $\Phi \Leftrightarrow \Psi_m$ и для любого $i \in \{1, \dots, m\}$ верно одно из следующих условий:

- $\Psi_i \in \{\Phi_1, \dots, \Phi_n\}$;
- $\Psi_i \Leftrightarrow \text{res}(\Psi_j, \Psi_k)$ для некоторых $j, k < i$.

§12. Метод резолюций в ЛП

В логике предикатов, как и в алгебре высказываний, имеют место следующие утверждения.

Лемма (правило резолюций в ЛП). $\Phi, \Psi \models \text{res}(\Phi, \Psi)$.

Домашнее задание. Докажите лемму. В качестве основы можно взять доказательство правила резолюций в АВ.

Теорема 11 (о полноте метода резолюций). Множество S элементарных дизъюнктов несовместно тогда и только тогда, когда существует резольтивный вывод пустого дизъюнкта из S .

Метод резолюций в ЛП. Проверим, что $\Phi_1, \dots, \Phi_n \models \Psi$.

1. Перекинем формулу Ψ за знак логического следствия влево. Таким образом мы свели задачу к проверке того, что $\Phi_1, \dots, \Phi_n, \neg\Psi \models$.

2. Найдём СНФ для формулы $\Phi_1 \wedge \dots \wedge \Phi_n \wedge \neg\Psi$, используя алгоритм сколемизации.

3. Отбросим у найденной СНФ кванторы $\forall$.

Таким образом, получена формула, находящаяся в КНФ. Следующие шаги аналогичны шагам метода резолюций в алгебре высказываний.

4. Разобьём полученную КНФ на элементарные дизъюнкции.

5. Попробуем построить резолютивный вывод $\emptyset$ из полученного множества элементарных дизъюнкций. Если вывод построить удалось, то $\Phi_1, \dots, \Phi_n \models \Psi$. В противном случае, опять же, мы не можем быть уверенными в том, что $\Phi_1, \dots, \Phi_n \not\models \Psi$ (возможно, мы не видим, какие формулы нужно «склеивать»). Для того, чтобы повысить нашу уверенность в этой ситуации, необходимо построить алгебраическую систему, в которой будут истинны все полученные в шаге 4 формулы.

Рассмотрим пример. Проверим, верно ли

$$\Phi(x), \forall x (\Phi(x) \rightarrow \Psi(x)) \models \exists x \Psi(x)$$

для любых формул $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ некоторой сигнатуры Σ , с помощью метода резолюций.

1. $\Phi(x), \forall x (\Phi(x) \rightarrow \Psi(x)), \neg \exists x \Psi(x) \models$.
2. $\Phi(x) \wedge \forall x (\neg \Phi(x) \vee \Psi(x)) \wedge \forall x \neg \Psi(x)$.
3. $\forall y (\Phi(x) \wedge (\neg \Phi(y) \vee \Psi(y)) \wedge \neg \Psi(y))$.
4. $\exists x \forall y (\Phi(x) \wedge (\neg \Phi(y) \vee \Psi(y)) \wedge \neg \Psi(y))$.
5. $\forall y (\Phi(c) \wedge (\neg \Phi(y) \vee \Psi(y)) \wedge \neg \Psi(y))$.
6. $\Phi(c), \neg \Phi(y) \vee \Psi(y), \neg \Psi(y)$.
7. Пробуем построить резолютивный вывод $\emptyset$:
 $\Psi_1 \Leftarrow \Phi(c)$,
 $\Psi_2 \Leftarrow \neg \Phi(y) \vee \Psi(y)$,
 $\Psi_3 \Leftarrow \neg \Psi(y)$,
 $\Psi_4 \Leftarrow \text{res}(\Psi_2, \Psi_3) \Leftarrow \neg \Phi(y)$,
 $\Psi_5 \Leftarrow \text{res}(\Psi_1, \Psi_4\{c/y\}) \Leftarrow \emptyset$.
 Таким образом,

$$\Phi(x), \forall x (\Phi(x) \rightarrow \Psi(x)) \models \exists x \Psi(x).$$

Метод резолюций лежит в основе декларативного языка программирования ПРОЛОГ, с которым подробнее можно познакомиться в Приложении А.