

ЕФРЕМОВ ЕВГЕНИЙ ЛЕОНИДОВИЧ

---

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

---

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

ВЛАДИВОСТОК

2024 г.

---

# ОГЛАВЛЕНИЕ

|                                                      |            |
|------------------------------------------------------|------------|
| <b>V. Исчисление предикатов</b>                      | <b>107</b> |
| §1. Определение исчисления предикатов . . . . .      | 107        |
| §2. Свойства формул ИП . . . . .                     | 108        |
| §3. Эквивалентные формулы . . . . .                  | 110        |
| §4. Некоторые выводимые формулы ИП . . . . .         | 113        |
| §5. Непротиворечивость ИП . . . . .                  | 114        |
| §6. Непротиворечивые множества формул . . . . .      | 115        |
| §7. Модель множества формул . . . . .                | 117        |
| §8. Теорема о существовании модели . . . . .         | 119        |
| §9. Теорема Гёделя о полноте ИП . . . . .            | 124        |
| §10. Начальные сведения о машинах Тьюринга . . . . . | 125        |
| §11. Проблема остановки . . . . .                    | 130        |
| §12. Неразрешимость ИП . . . . .                     | 131        |
| §13. Независимость ИП . . . . .                      | 137        |

---

---

# ГЛАВА V

---

## ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ

Так же, как и в случае с логикой высказываний, опишем построение формальной системы, формулами которой являются формулы фиксированной сигнатуры. Определение формульного исчисления было дано в §1 главы III.

### §1. Определение исчисления предикатов

Зафиксируем сигнатуру  $\Sigma$ .

I. Так как формулами  $ИП^\Sigma$  являются формулы сигнатуры  $\Sigma$ , нетрудно понять, что *алфавит*  $ИП^\Sigma$  состоит в точности из символов языка логики предикатов сигнатуры  $\Sigma$ :

1) счётное множество символов переменных  $\{v_i \mid i \in \omega\}$ , элементы которого будем называть просто *переменными* и обозначать через  $x, y, z, u, v, w$  (возможно с индексами);

2) символы сигнатуры  $\Sigma$ ;

3) *логические связки*:  $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$ ;

4) *кванторы*:  $\exists, \forall$ ;

5)  $=$ ;

6)  $(, ), , \cdot$ .

II. Множество *формул*  $ИП^\Sigma$  совпадает со множеством формул сигнатуры  $\Sigma$ . Определения термов и атомарных формул сигнатуры  $\Sigma$  сохраняются.

Напомним, что формулы исчисления — всего лишь последовательностями символов. Они не наделены каким-либо смыслом и в рамках исчисления про истинность формул не говорят.

III. Для любых формул  $ИП^\Sigma$   $\Phi, \Psi, \Theta$  следующие формулы будем считать *аксиомами*  $ИП^\Sigma$ :

- A1.  $\Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Phi).$
- A2.  $(\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow ((\Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Theta)) \rightarrow (\Phi \rightarrow \Theta)).$
- A3.  $\Phi \wedge \Psi \rightarrow \Phi.$
- A4.  $\Phi \wedge \Psi \rightarrow \Psi.$
- A5.  $(\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow ((\Phi \rightarrow \Theta) \rightarrow (\Phi \rightarrow \Psi \wedge \Theta)).$
- A6.  $\Phi \rightarrow \Phi \vee \Psi.$
- A7.  $\Psi \rightarrow \Phi \vee \Psi.$
- A8.  $(\Phi \rightarrow \Theta) \rightarrow ((\Psi \rightarrow \Theta) \rightarrow (\Phi \vee \Psi \rightarrow \Theta)).$
- A9.  $(\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow ((\Phi \rightarrow \neg \Psi) \rightarrow \neg \Phi).$
- A10.  $\neg \neg \Phi \rightarrow \Phi.$
- A11.  $\forall x \Phi \rightarrow [\Phi]_t^x.$
- A12.  $[\Phi]_t^x \rightarrow \exists x \Phi.$
- A13.  $(x = y) \rightarrow ([\Phi]_x^z \rightarrow [\Phi]_y^z).$
- A14.  $x = x.$

В аксиомах 11 и 12  $t$  — это терм сигнатуры  $\Sigma$ . Под  $[\Phi]_t^x$  понимается формула, получаемая из формулы  $\Phi$  заменой всех свободных вхождений переменной  $x$  на терм  $t$ .

IV. В отличие от исчисления высказываний, *правил вывода ИП $^\Sigma$*  три:

- ПВ1. 
$$\frac{\Phi, \Phi \rightarrow \Psi}{\Psi} \text{ (modus ponens).}$$
- ПВ2. 
$$\frac{\Phi \rightarrow \Psi}{\Phi \rightarrow \forall x \Psi}.$$
- ПВ3. 
$$\frac{\Psi \rightarrow \Phi}{\exists x \Psi \rightarrow \Phi}.$$

В правилах вывода 1–3  $\Phi, \Psi$  — формулы ИП $^\Sigma$ ,  $x \notin FV(\Phi)$ .

## §2. Свойства формул ИП

Заменяв в аксиомах A1–A10 и в правиле вывода ПВ1 (MP) формулы исчисления предикатов на формулы исчисления высказываний, мы получим все аксиомы и правила вывода ИВ. Следовательно, многие утверждения, доказанные нами в ИВ, сохраняются и в ИП $^\Sigma$ .

**Теорема 1 (дедукции).** Пусть  $\Gamma$  — множество формул ИП $^\Sigma$ ,  $\Phi, \Psi$  — формулы ИП $^\Sigma$ . Тогда

$$\Gamma, \Phi \vdash \Psi \iff \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi.$$

**Доказательство.**

По замечанию выше все пункты доказательства, которые используют только аксиомы A1–A10 и правило вывода МР, можно сохранить. Дополнительные рассуждения необходимо провести в доказательстве *необходимости* для случая, когда формула  $\Psi_i$  выводится из  $\{\Psi_1, \dots, \Psi_{i-1}\}$  по правилу вывода ПВ2 или ПВ3.

Пусть  $\Psi_i$  выводится из  $\Psi_1, \dots, \Psi_{i-1}$  по ПВ2. Тогда  $\Psi_i \Leftrightarrow \Theta_1 \rightarrow \forall x \Theta_2$  получается из формулы  $\Psi_k \Leftrightarrow \Theta_1 \rightarrow \Theta_2$ , где  $k < i$ ,  $x \notin FV(\Theta_1)$ . По предположению индукции  $\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi_k$ , т.е.  $\Gamma \vdash \Phi \rightarrow (\Theta_1 \rightarrow \Theta_2)$ . Забегая вперёд, нетрудно понять, что

$$\Phi \rightarrow (\Theta_1 \rightarrow \Theta_2) \equiv \Phi \wedge \Theta_1 \rightarrow \Theta_2.$$

Построим квазивывод формулы  $\Phi \rightarrow \Psi_i$  из  $\Gamma$ :

1. [по предп.]  $\Phi \rightarrow (\Theta_1 \rightarrow \Theta_2)$ .
2. [по замеч.]  $\Phi \wedge \Theta_1 \rightarrow \Theta_2$ .
3. [ПВ2 (2)]  $\Phi \wedge \Theta_1 \rightarrow \forall x \Theta_2$ .
4. [по замеч.]  $\Phi \rightarrow (\Theta_1 \rightarrow \forall x \Theta_2)$ .

Аналогичным образом проверяется случай, когда формула  $\Psi_i$  выводится из  $\Psi_1, \dots, \Psi_{i-1}$  по ПВ3.  $\square$

Доказательство следующих утверждений полностью повторяет доказательство аналогичных им из главы ??.

**Свойство 1.**  $\vdash \Phi \rightarrow \Phi$ .

**Свойство 2.**  $\Phi, \Psi \vdash \Phi \wedge \Psi$ .

**Свойство 3 (контрапозиции).**  $\Phi \rightarrow \Psi \vdash \neg \Psi \rightarrow \neg \Phi$ .

**Свойство 4 (транзитивности).**  $\Phi \rightarrow \Psi, \Psi \rightarrow \Theta \vdash \Phi \rightarrow \Theta$ .

**Свойство 5.**  $\Phi \vdash \neg \neg \Phi$ .

**Свойство 6.**  $\Phi \wedge \neg \Phi \vdash \Psi$ .

**Свойство 7.**  $\vdash \Phi \vee \neg \Phi$ .

### §3. Эквивалентные формулы

Определение эквивалентных формул исчисления предикатов аналогично определению для исчисления высказываний. А именно,

**Определение.** Формулы  $\Phi$  и  $\Psi$  ИП <sup>$\Sigma$</sup>  называются *эквивалентными* (обозначение:  $\Phi \equiv \Psi$ ), если  $\Phi \vdash \Psi$  и  $\Psi \vdash \Phi$ .

Так как при доказательстве эквивалентностей из теоремы ?? мы использовали аксиомы и правила вывода исчисления высказываний, которые в исчислении предикатов также имеют место, то здесь верна следующая

**Теорема 2.** Пусть  $\Phi, \Psi, \Theta$  — формулы исчисления предикатов. Тогда имеют место следующие эквивалентности:

1. a)  $\Phi \wedge \Phi \equiv \Phi$ ,  
b)  $\Phi \vee \Phi \equiv \Phi$ .
2. a)  $\Phi \wedge \Psi \equiv \Psi \wedge \Phi$ ,  
b)  $\Phi \vee \Psi \equiv \Psi \vee \Phi$ .
3. a)  $\Phi \wedge (\Psi \wedge \Theta) \equiv (\Phi \wedge \Psi) \wedge \Theta$ ,  
b)  $\Phi \vee (\Psi \vee \Theta) \equiv (\Phi \vee \Psi) \vee \Theta$ .
4. a)  $\Phi \wedge (\Psi \vee \Theta) \equiv (\Phi \wedge \Psi) \vee (\Phi \wedge \Theta)$ ,  
b)  $\Phi \vee (\Psi \wedge \Theta) \equiv (\Phi \vee \Psi) \wedge (\Phi \vee \Theta)$ .
5. a)  $\neg(\Phi \wedge \Psi) \equiv \neg \Phi \vee \neg \Psi$ ,  
b)  $\neg(\Phi \vee \Psi) \equiv \neg \Phi \wedge \neg \Psi$ .
6. a)  $\Phi \wedge (\Phi \vee \Psi) \equiv \Phi$ ,  
b)  $\Phi \vee (\Phi \wedge \Psi) \equiv \Phi$ .
7.  $\neg \neg \Phi \equiv \Phi$ .
8.  $\Phi \rightarrow \Psi \equiv \neg \Phi \vee \Psi$ .

**Теорема 3.** Пусть  $\Phi, \Psi$  — формулы сигнатуры  $\Sigma$ ,  $x \notin FV(\Psi)$ . Тогда имеют место следующие эквивалентности:

1. a)  $\neg\forall x\Phi \equiv \exists x\neg\Phi$ ,  
b)  $\neg\exists x\Phi \equiv \forall x\neg\Phi$ .
2. a)  $\forall x\Phi \wedge \Psi \equiv \forall x(\Phi \wedge \Psi)$ ,  
b)  $\forall x\Phi \vee \Psi \equiv \forall x(\Phi \vee \Psi)$ .
3. a)  $\exists x\Phi \wedge \Psi \equiv \exists x(\Phi \wedge \Psi)$ ,  
b)  $\exists x\Phi \vee \Psi \equiv \exists x(\Phi \vee \Psi)$ .
4. a)  $\forall x\Phi \equiv \forall y[\Phi]_y^x$ ,  
b)  $\exists x\Phi \equiv \exists y[\Phi]_y^x$ ,

где  $[\Phi]_y^x$  — формула, получаемая заменой в формуле  $\Phi$  свободного вхождения переменной  $x$  на новую переменную  $y$ .

### Доказательство.

Докажем, например, что  $\neg\exists x\Phi(x, \bar{y}) \equiv \forall x\neg\Phi(x, \bar{y})$  (1b).

1. [гип]  $\neg\exists x\Phi(x, \bar{y})$ .
2. [A12]  $\Phi(x, \bar{y}) \rightarrow \exists x\Phi(x, \bar{y})$ .

В аксиоме 12 в посылке импликации  $t \Leftrightarrow x$ , формулу  $\Phi$  заменили на  $\Phi(x, \bar{y})$ . Мы будем опускать указание соответствующих замен, предполагая, что читатель хорошо изучил тему «Исчисление высказываний» (глава ??).

3. [контр. (2)]  $\neg\exists x\Phi(x, \bar{y}) \rightarrow \neg\Phi(x, \bar{y})$ .

Полученная согласно свойству контрапозиции формула 3 не содержит свободного  $x$  в посылке. Следовательно, к заключению можно приписать  $\forall x$  (правило вывода 2).

4. [ПВ2 (3)]  $\neg\exists x\Phi(x, \bar{y}) \rightarrow \forall x\neg\Phi(x, \bar{y})$ .
5. [MP (1,4)]  $\forall x\neg\Phi(x, \bar{y})$ .

Таким образом,  $\neg\exists x\Phi(x, \bar{y}) \vdash \forall x\neg\Phi(x, \bar{y})$ . Докажем  $\forall x\neg\Phi(x, \bar{y}) \vdash \neg\exists x\Phi(x, \bar{y})$ :

1. [гип]  $\forall x\neg\Phi(x, \bar{y})$ .
2. [A11]  $\forall x\neg\Phi(x, \bar{y}) \rightarrow \neg\Phi(x, \bar{y})$ .
3. [контр. (2)]  $\neg\neg\Phi(x, \bar{y}) \rightarrow \neg\forall x\neg\Phi(x, \bar{y})$ .
4. [св. 5 + Th. дед.]  $\Phi(x, \bar{y}) \rightarrow \neg\neg\Phi(x, \bar{y})$ .
5. [транз. (3, 4)]  $\Phi(x, \bar{y}) \rightarrow \neg\forall x\neg\Phi(x, \bar{y})$ .
6. [ПВ3 (5)]  $\exists x\Phi(x, \bar{y}) \rightarrow \neg\forall x\neg\Phi(x, \bar{y})$ .
7. [контр. (6)]  $\neg\neg\forall x\neg\Phi(x, \bar{y}) \rightarrow \neg\exists x\Phi(x, \bar{y})$ .
8. [св. 5 + Th. дед.]  $\forall x\neg\Phi(x, \bar{y}) \rightarrow \neg\neg\forall x\neg\Phi(x, \bar{y})$ .
9. [транз. (7, 8)]  $\forall x\neg\Phi(x, \bar{y}) \rightarrow \neg\exists x\Phi(x, \bar{y})$ .
10. [MP (1,9)]  $\neg\exists x\Phi(x, \bar{y})$ . □

Доказательство остальных пунктов теоремы предлагается читателю в качестве упражнений, чтобы вспомнить методы построения вывода формул и закрепить навык использования новых аксиом и правил вывода.

**Теорема 4.** Пусть  $\Phi, \Psi$  — формулы сигнатуры  $\Sigma$ . Тогда имеют место следующие эквивалентности:

1.  $\exists x(\Phi \vee \Psi) \equiv \exists x\Phi \vee \exists x\Psi$ .
2.  $\forall x(\Phi \wedge \Psi) \equiv \forall x\Phi \wedge \forall x\Psi$ .

**Доказательство.**

Докажем, что  $\exists x (\Phi(x, \bar{y}) \vee \Psi(x, \bar{y})) \equiv \exists x \Phi(x, \bar{y}) \vee \exists x \Psi(x, \bar{y})$  (1).

1. [гип]  $\exists x (\Phi(x, \bar{y}) \vee \Psi(x, \bar{y}))$ .
2. [A8]  $(\Phi(x, \bar{y}) \rightarrow \exists x \Phi(x, \bar{y}) \vee \exists x \Psi(x, \bar{y})) \rightarrow$   
 $\rightarrow ((\Psi(x, \bar{y}) \rightarrow \exists x \Phi(x, \bar{y}) \vee \exists x \Psi(x, \bar{y})) \rightarrow$   
 $\rightarrow (\Phi(x, \bar{y}) \vee \Psi(x, \bar{y}) \rightarrow \exists x \Phi(x, \bar{y}) \vee \exists x \Psi(x, \bar{y})))$ .
3. [A12]  $\Phi(x, \bar{y}) \rightarrow \exists x \Phi(x, \bar{y})$ .
4. [A6]  $\exists x \Phi(x, \bar{y}) \rightarrow \exists x \Phi(x, \bar{y}) \vee \exists x \Psi(x, \bar{y})$ .
5. [транз. (2, 3)]  $\Phi(x, \bar{y}) \rightarrow \exists x \Phi(x, \bar{y}) \vee \exists x \Psi(x, \bar{y})$ .
6. [A12]  $\Psi(x, \bar{y}) \rightarrow \exists x \Psi(x, \bar{y})$ .
7. [A7]  $\exists x \Psi(x, \bar{y}) \rightarrow \exists x \Phi(x, \bar{y}) \vee \exists x \Psi(x, \bar{y})$ .
8. [транз. (2, 3)]  $\Psi(x, \bar{y}) \rightarrow \exists x \Phi(x, \bar{y}) \vee \exists x \Psi(x, \bar{y})$ .
9. [MP ((2, 5), 8)]  $\Phi(x, \bar{y}) \vee \Psi(x, \bar{y}) \rightarrow \exists x \Phi(x, \bar{y}) \vee \exists x \Psi(x, \bar{y})$ .
10. [ПВ3 (9)]  $\exists x \Phi(x, \bar{y}) \vee \Psi(x, \bar{y}) \rightarrow \exists x \Phi(x, \bar{y}) \vee \exists x \Psi(x, \bar{y})$ .
11. [MP (1, 10)]  $\exists x \Phi(x, \bar{y}) \vee \exists x \Psi(x, \bar{y})$ .
1. [гип]  $\exists x \Phi(x, \bar{y}) \vee \exists x \Psi(x, \bar{y})$ .
2. [A8]  $(\exists x \Phi(x, \bar{y}) \rightarrow \exists x (\Phi(x, \bar{y}) \vee \Psi(x, \bar{y}))) \rightarrow$   
 $\rightarrow ((\exists x \Psi(x, \bar{y}) \rightarrow \exists x (\Phi(x, \bar{y}) \vee \Psi(x, \bar{y}))) \rightarrow$   
 $\rightarrow (\exists x \Phi(x, \bar{y}) \vee \exists x \Psi(x, \bar{y}) \rightarrow \exists x (\Phi(x, \bar{y}) \vee \Psi(x, \bar{y}))))$ .
3. [A6]  $\Phi(x, \bar{y}) \rightarrow \Phi(x, \bar{y}) \vee \Psi(x, \bar{y})$ .
4. [A12]  $\Phi(x, \bar{y}) \vee \Psi(x, \bar{y}) \rightarrow \exists x (\Phi(x, \bar{y}) \vee \Psi(x, \bar{y}))$ .
5. [транз. (3, 4)]  $\Phi(x, \bar{y}) \rightarrow \exists x (\Phi(x, \bar{y}) \vee \Psi(x, \bar{y}))$ .
6. [ПВ3 (5)]  $\exists x \Phi(x, \bar{y}) \rightarrow \exists x (\Phi(x, \bar{y}) \vee \Psi(x, \bar{y}))$ .
7. [A7]  $\Psi(x, \bar{y}) \rightarrow \Phi(x, \bar{y}) \vee \Psi(x, \bar{y})$ .
8. [A12]  $\Phi(x, \bar{y}) \vee \Psi(x, \bar{y}) \rightarrow \exists x (\Phi(x, \bar{y}) \vee \Psi(x, \bar{y}))$ .
9. [транз. (3, 4)]  $\Psi(x, \bar{y}) \rightarrow \exists x (\Phi(x, \bar{y}) \vee \Psi(x, \bar{y}))$ .
10. [ПВ3 (5)]  $\exists x \Psi(x, \bar{y}) \rightarrow \exists x (\Phi(x, \bar{y}) \vee \Psi(x, \bar{y}))$ .
11. [MP (((6, 2), 10), 1)]  $\exists x (\Phi(x, \bar{y}) \vee \Psi(x, \bar{y}))$ . □

**Домашнее задание.** Докажите [теоремы 3](#) и [4](#).

**Лемма (о замене в ИП).** Пусть  $\Phi$  — формула сигнатуры  $\Sigma$ ,  $\Psi$  — подформула формулы  $\Phi$ ,  $\Psi \equiv \Psi'$ , формула  $\Phi'$  получается из формулы  $\Phi$  заменой подформулы  $\Psi$  на  $\Psi'$ . Тогда  $\Phi \equiv \Phi'$ .

## §4. Некоторые выводимые формулы ИП

Отметим некоторые простые свойства выводимых формул ИП.

**Теорема 5.** Пусть  $\Phi$  — доказуемая формула сигнатуры  $\Sigma$ ,  $x \in FV(\Phi)$ . Тогда формулы  $\exists x \Phi$ ,  $\forall x \Phi$  и  $[\Phi]_t^x$  ( $t$  — терм сигнатуры  $\Sigma$ ) также являются доказуемыми.

**Доказательство.**

Доказуемость  $\exists x \Phi$  очевидна.

Построим доказательство формулы  $\forall x \Phi$ :

1. [дано]  $\Phi$ .
2. [A1]  $\Phi \rightarrow ((y = y) \rightarrow \Phi)$ .
3. [MP (1, 2)]  $(y = y) \rightarrow \Phi$ .
4. [ПВ2 (3)]  $(y = y) \rightarrow \forall x \Phi$ .
5. [A14]  $y = y$ .
6. [MP (4, 5)]  $\forall x \Phi$ .

Так как  $\forall x \Phi \rightarrow [\Phi]_t^x$  — аксиома, то в силу теоремы дедукции и ранее доказанного формула  $[\Phi]_t^x$  является доказуемой.  $\square$

**Теорема 6.** Пусть  $t, g, h(x_1, \dots, x_n), t_1, \dots, t_n, g_1, \dots, g_n$  — термы сигнатуры  $\Sigma$ ,  $\Phi(x_1, \dots, x_n)$  — формула сигнатуры  $\Sigma$ . Тогда

1.  $\vdash t = t$ .
2.  $t = g \vdash g = t$ .
3.  $t = g, g = h \vdash t = h$ .
4.  $t_1 = g_1, \dots, t_n = g_n \vdash h(t_1, \dots, t_n) = h(g_1, \dots, g_n)$ .
5.  $t_1 = g_1, \dots, t_n = g_n \vdash \Phi(t_1, \dots, t_n) \rightarrow \Phi(g_1, \dots, g_n)$ .

**Доказательство.**

Пункт 1 следует из [теоремы 5](#), если положить  $\Phi \Leftarrow x = x$ .

Докажем пункт 2. Формула  $(x = y) \rightarrow ((x = x) \rightarrow (y = x))$  — аксиома 13 ( $\Phi \Leftrightarrow z = x$ ), поэтому в силу теоремы дедукции  $x = y, x = x \vdash y = x$ . Так как  $x = x$  — аксиома, то по теореме дедукции  $(x = y) \rightarrow (y = x)$  — доказуемая формула. По [теореме 5](#) доказуемой также является формула  $(t = g) \rightarrow (g = t)$ , поэтому  $t = g \vdash g = t$ .

Доказательство пункта 3 аналогично доказательству пункта 2. Так как формула  $(y = x) \rightarrow ((y = u) \rightarrow (x = u))$  — аксиома 13 ( $\Phi \Leftrightarrow z = u$ ), то  $y = x, y = u \vdash x = u$ . Согласно пункту 2  $x = y, y = u \vdash x = u$ . По [теореме 5](#)  $t = g, g = h \vdash t = h$ .

Пункты 4 и 5 легко показать индукцией по  $n$ . □

**Домашнее задание.** Докажите пункты 4 и 5 [теоремы 6](#).

## §5. Непротиворечивость ИП

Как и в случае с исчислением высказываний, нам бы хотелось затронуть основные вопросы метатеории исчисления предикатов и доказать ряд серьёзных утверждений относительно логики первого порядка. Начнём с самого простого и самого важного из них.

**Теорема 7 (о непротиворечивости ИП).** *ИП непротиворечиво.*

### Доказательство.

Для начала покажем, что любая доказуемая формула сигнатуры  $\Sigma$  является тождественно истинной. Как и ранее, достаточно показать, что любая аксиома  $\text{ИП}^\Sigma$  является тождественно истинной формулой, а правила вывода сохраняют это свойство.

Докажем, например, что  $\models \Phi(\bar{x}) \wedge \Psi(\bar{x}) \rightarrow \Phi(\bar{x})$ . Пусть  $\mathfrak{A} = \langle A; \Sigma \rangle$ ,  $\bar{a} \in A$ ,  $\mathfrak{A} \models \Phi(\bar{a}) \wedge \Psi(\bar{a})$ . Согласно определению истинности конъюнкции в алгебраической системе  $\mathfrak{A} \models \Phi(\bar{a})$ .

Проверим тождественную истинность аксиомы A11. Пусть  $\mathfrak{A} = \langle A; \Sigma \rangle$ ,  $\bar{a} \in A$ ,  $\mathfrak{A} \models \forall x \Phi(x, \bar{a})$ . По определению истинности формулы, начинающейся с квантора  $\forall$ , получим  $\mathfrak{A} \models \Phi(b, \bar{a})$  для любого  $b \in A$ . Тогда  $\mathfrak{A} \models \Phi(t^{\mathfrak{A}}(\bar{c}), \bar{a})$  для любого терма  $t(\bar{z})$  сигнатуры  $\Sigma$  и  $\bar{c} \in A$ . Таким образом,  $\models \forall x \Phi(x, \bar{y}) \rightarrow \Phi(t(\bar{z}), \bar{y})$ .

Покажем, что третье правило вывода сохраняет тождественную истинность. Пусть  $\models \Psi(x, \bar{y}) \rightarrow \Phi(\bar{y})$ ,  $x \notin \bar{y}$ ,  $\mathfrak{A} = \langle A; \Sigma \rangle$ ,  $\bar{a} \in A$ ,  $\mathfrak{A} \models \exists x \Psi(x, \bar{a})$ . По определению истинности формулы, начинающейся с квантора  $\exists$ , существует  $b \in A$

такой, что  $\mathfrak{A} \models \Psi(b, \bar{a})$ . Так как  $\models \Psi(x, \bar{y}) \rightarrow \Phi(\bar{y})$ , то  $\mathfrak{A} \models \Psi(b, \bar{a}) \rightarrow \Phi(\bar{a})$ . Следовательно,  $\mathfrak{A} \models \Phi(\bar{a})$ .<sup>1</sup>

Таким образом,

$$\vdash \Phi \implies \models \Phi.$$

Перейдём к доказательству непротиворечивости ИП <sup>$\Sigma$</sup> . Предположим, что это не так, т.е. все формулы сигнатуры  $\Sigma$  доказуемы. По доказанному выше все формулы сигнатуры  $\Sigma$  тождественно истинны. Пусть  $\mathfrak{A} = \langle A; \Sigma \rangle$ ,  $\Phi$  — формула сигнатуры  $\Sigma$ . Тогда  $\mathfrak{A} \models \Phi$  и  $\mathfrak{A} \models \neg \Phi$ . По определению истинности отрицания  $\mathfrak{A} \models \Phi$  и  $\mathfrak{A} \not\models \Phi$  — противоречие.  $\square$

## §6. Непротиворечивые множества формул

Для изучения свойства полноты исчисления предикатов нам понадобится ещё одно немаловажное понятие.

**Определение.** Множество формул  $\Gamma$  сигнатуры  $\Sigma$  называется *противоречивым*, если существует такая формула  $\Phi$  сигнатуры  $\Sigma$ , что  $\Gamma \vdash \Phi \wedge \neg \Phi$ . В противном случае  $\Gamma$  называется *непротиворечивым*.

Отметим ещё одно определение, эквивалентное данному.

**Лемма.** Для множества формул  $\Gamma$  сигнатуры  $\Sigma$  следующие условия эквивалентны:

- 1)  $\Gamma$  противоречиво,
- 2)  $\Gamma \vdash \Phi \wedge \neg \Phi$  для некоторой формулы  $\Phi$  сигнатуры  $\Sigma$ ,
- 3)  $\Gamma \vdash \Phi \wedge \neg \Phi$  для любой формулы  $\Phi$  сигнатуры  $\Sigma$ .

**Доказательство.**

Импликация  $2) \Rightarrow 1)$  является введённым нами определением. Импликация  $3) \Rightarrow 2)$  очевидна. Докажем  $1) \Rightarrow 3)$ .

Так как  $\Gamma$  противоречиво, то  $\Gamma \vdash \Psi \wedge \neg \Psi$  для некоторой формулы  $\Psi$  сигнатуры  $\Sigma$ . По [свойству 6](#)  $\Psi \wedge \neg \Psi \vdash \Phi \wedge \neg \Phi$  для любой формулы  $\Phi$  сигнатуры  $\Sigma$ . Следовательно,  $\Gamma \vdash \Phi \wedge \neg \Phi$  для любой формулы  $\Phi$  сигнатуры  $\Sigma$ .  $\square$

Отметим некоторые свойства непротиворечивых множеств.

<sup>1</sup>Покажем, что условие  $x \notin \bar{y}$  существенно. Пусть  $\models \Psi(x, \bar{y}) \rightarrow \Phi(x, \bar{y})$ ,  $\mathfrak{A} = \langle A; \Sigma \rangle$ ,  $\bar{a} \in A$ . Нам нужно показать, что если  $\mathfrak{A} \models \exists x \Psi(x, \bar{a})$ , то  $\mathfrak{A} \models \Phi(b, \bar{a})$  для любого  $b \in A$ . Пусть  $\mathfrak{A} \models \exists x \Psi(x, \bar{a})$ . Тогда существует  $c \in A$  такой, что  $\mathfrak{A} \models \Psi(c, \bar{a})$ . Так как  $\models \Psi(x, \bar{y}) \rightarrow \Phi(x, \bar{y})$ , то  $\mathfrak{A} \models \Phi(c, \bar{a})$ . Если предположить, что такой  $c \in A$  единственен и  $|A| \neq 1$ , то условие  $\mathfrak{A} \models \Phi(b, \bar{a})$  для любого  $b \in A$  не выполняется. Поэтому  $\not\models \exists x \Psi(x, \bar{y}) \rightarrow \Phi(x, \bar{y})$ .

**Теорема 8.**

1.  $\emptyset$  непротиворечиво.
2. Если  $\Gamma$  — непротиворечивое множество формул и  $\Gamma \vdash \Phi$ , то  $\Gamma \cup \{\Phi\}$  непротиворечиво.
3. Если  $\Gamma \cup \{\exists x \Phi\}$  — непротиворечивое множество формул, то множество  $\Gamma \cup \{[\Phi]_y^x\}$  также непротиворечиво.
4. Если  $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \dots \subseteq \Gamma_n \subseteq \dots$  — цепь непротиворечивых множеств, то  $\bigcup_{i \in \omega} \Gamma_i$  — непротиворечивое множество.
5. Для любого непротиворечивого множества формул  $\Gamma$  и любой формулы  $\Phi$  либо  $\Gamma \cup \{\Phi\}$ , либо  $\Gamma \cup \{\neg \Phi\}$  непротиворечиво.

**Доказательство.**

1. Предположим, что  $\emptyset$  противоречиво. Тогда  $\vdash \Phi \wedge \neg \Phi$  для некоторой формулы  $\Phi$  сигнатуры  $\Sigma$ . Так как исчисление предикатов сигнатуры  $\Sigma$  непротиворечиво, то  $\models \Phi \wedge \neg \Phi$  — противоречие.

2. Пусть условия утверждения выполняются и  $\Gamma \cup \{\Phi\}$  противоречиво. По определению  $\Gamma \cup \{\Phi\} \vdash \Psi \wedge \neg \Psi$  для некоторой формулы  $\Psi$ . Согласно теореме дедукции  $\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi \wedge \neg \Psi$ . По свойству контрапозиции  $\Gamma \vdash \neg(\Psi \wedge \neg \Psi) \rightarrow \neg \Phi$ . Воспользовавшись основными эквивалентностями в посылке импликации, получим  $\Gamma \vdash \Psi \vee \neg \Psi \rightarrow \neg \Phi$ . Так как  $\vdash \Psi \vee \neg \Psi$  (свойство 7), то  $\Gamma \vdash \neg \Phi$ . Таким образом,  $\Gamma \vdash \Phi \wedge \neg \Phi$ , что противоречит условию.

3. Предположим, что  $\Gamma \cup \{[\Phi]_y^x\}$  противоречиво, т.е.  $\Gamma \cup \{[\Phi]_y^x\} \vdash \Psi \wedge \neg \Psi$  для любой формулы  $\Psi$ . По теореме дедукции  $\Gamma \vdash [\Phi]_y^x \rightarrow \Psi \wedge \neg \Psi$ . Можно считать, что  $y \notin FV(\Psi)$ . Согласно третьему правилу вывода  $\Gamma \vdash \exists y [\Phi]_y^x \rightarrow \Psi \wedge \neg \Psi$ . Так как  $\exists x \Phi \equiv \exists y [\Phi]_y^x$ , то  $\Gamma \vdash \exists x \Phi \rightarrow \Psi \wedge \neg \Psi$ . Тогда по теореме дедукции  $\Gamma \cup \{\exists x \Phi\} \vdash \Psi \wedge \neg \Psi$ , т.е.  $\Gamma \cup \{\exists x \Phi\}$  противоречиво.

4. Пусть условия утверждения выполняются и  $\bigcup_{i \in \omega} \Gamma_i$  — противоречивое множество. Тогда  $\bigcup_{i \in \omega} \Gamma_i \vdash \Psi \wedge \neg \Psi$  для некоторой формулы  $\Psi$ . Так как вывод конечен, то существуют такие  $\Phi_1, \dots, \Phi_n \in \bigcup_{i \in \omega} \Gamma_i$ , что  $\Phi_1, \dots, \Phi_n \vdash \Psi \wedge \neg \Psi$ . Пусть  $k \in \omega$  — наименьшее такое, что  $\Phi_1, \dots, \Phi_n \in \Gamma_k$ . Следовательно,  $\Gamma_k \vdash \Psi \wedge \neg \Psi$  — противоречие.

5. Предположим, что  $\Gamma$  — непротиворечивое множество формул,  $\Gamma \cup \{\Phi\}$  и  $\Gamma \cup \{\neg \Phi\}$  противоречивы для некоторой формулы  $\Phi$ . Тогда  $\Gamma \cup \{\Phi\} \vdash \Psi \wedge \neg \Psi$  и  $\Gamma \cup \{\neg \Phi\} \vdash \Psi \wedge \neg \Psi$  для любой формулы  $\Psi$ . Аналогично пункту 2, получим  $\Gamma \vdash \Phi$  и  $\Gamma \vdash \neg \Phi$ , т.е.  $\Gamma \vdash \Phi \wedge \neg \Phi$ , что противоречит непротиворечивости  $\Gamma$ .  $\square$

## §7. Модель множества формул

**Определение.** Алгебраическая система  $\mathfrak{A} = \langle A; \Sigma \rangle$  называется *моделью множества формул*  $\Gamma$  сигнатуры  $\Sigma$ , если существует  $\bar{a} \in A$  такой, что  $\mathfrak{A} \models \Phi(\bar{a})$  для всех  $\Phi \in \Gamma$ .

**Определение.** Множество формул  $\Gamma$  называется *выполнимым*, если  $\Gamma$  имеет модель. Множество  $\Gamma$  называется *локально выполнимым*, если всякое конечное подмножество множества  $\Gamma$  имеет модель.

**Примеры.** Зафиксируем сигнатуру  $\Sigma = \{<^{(2)}\}$ . Пусть

$$\Phi_1 \Leftrightarrow \forall x \forall y \forall z ((x < y) \wedge (y < z) \rightarrow (x < z)),$$

$$\Phi_2 \Leftrightarrow \neg \exists x \exists y ((x < y) \wedge (y < x)),$$

$$\Phi_3 \Leftrightarrow \forall x \forall y ((x = y) \vee (x < y) \vee (y < x)),$$

$$\Phi_4(x) \Leftrightarrow \forall y ((x = y) \vee (x < y)),$$

$$\Phi_5 \Leftrightarrow \forall x \forall y (\neg(x < y) \wedge \neg(y < x)).$$

Формулы  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  и  $\Phi_3$  определяют линейный порядок  $<$ , поэтому любое линейно упорядоченное относительно  $<$  множество будет моделью множества  $\{\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3\}$ . Формула  $\Phi_4$  — определение наименьшего относительно  $<$  элемента, поэтому  $\langle \mathbb{N}; <^{(2)} \rangle$  является моделью множества  $\{\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4\}$  со стандартной интерпретацией символа  $<$ , а система  $\langle \mathbb{Z}; <^{(2)} \rangle$  не является. Любая модель множества  $\{\Phi_2, \Phi_5\}$  не может иметь более одного элемента.

**Обозначение.** Тот факт, что алгебраическая система  $\mathfrak{A}$  является моделью множества формул  $\Gamma$ , кратко будем записывать так:  $\mathfrak{A} \models \Gamma$ . В случае, когда важно показать, что все формулы из  $\Gamma$  истинны в  $\mathfrak{A}$  на элементах  $\bar{a}$ , будем писать  $\mathfrak{A} \models \Gamma(\bar{a})$ .

Следующее очень важное утверждение позволяет рассматривать лишь конечный набор формул при решении некоторых задач на построение модели множества формул.

**Теорема 9 (компактности).** *Любое локально выполнимое множество формул выполнимо.*

В 1930 г. теорема компактности была доказана Куртом Гёделем для случая счётного множества формул. Несчётный случай доказан Анатолием Ивановичем Мальцевым в 1936 г. Мы же рассмотрим доказательство теоремы в одной из следующих глав, посвящённой многим вопросам специального раздела математической логики — *теории моделей*, которая изучает связи между формальными языками и моделями.

Рассмотрим применение теоремы компактности на двух примерах.

**Пример 1.** *Характеристикой поля  $\mathbb{P}$  (обозначение:  $\text{char } \mathbb{P}$ ) называется такое наименьшее число  $n \in \mathbb{N}$ , что*

$$\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_n = 0,$$

где 1 и 0 — единица и ноль поля  $\mathbb{P}$  соответственно. В случае, когда такого  $n$  не существует, полагают  $\text{char } \mathbb{P} = 0$ .

**Утверждение.** Если предложение  $\Phi$  истинно во всех полях нулевой характеристики, то существует  $k \in \mathbb{N}$  такое, что  $\Phi$  истинно во всех полях характеристики  $\geq k$ .

**Доказательство.**

Зафиксируем сигнатуру  $\Sigma = \{+^{(2)}, \cdot^{(2)}, 0^{(0)}, 1^{(0)}\}$ . Пусть  $\Phi$  — предложение сигнатуры  $\Sigma$ , истинное во всех полях нулевой характеристики,  $\mathcal{A}$  — множество всех аксиом поля (формул сигнатуры  $\Sigma$ , определяющих поле: коммутативность и ассоциативность  $+$  и  $\cdot$ , описание 0 и 1, существование противоположных по  $+$  и  $\cdot$ , и т.д.),

$$\Psi_n \Leftrightarrow \neg \left( \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_n = 0 \right) \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$\Gamma = \{\neg\Phi\} \cup \mathcal{A} \cup \{\Psi_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Множество  $\Gamma$  невыполнимо. Действительно, если бы  $\mathbb{P} \models \Gamma$ , то  $\mathbb{P}$  являлось бы полем, в котором истинны все формулы  $\Psi_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Тогда  $\text{char } \mathbb{P} = 0$ . Но по условию  $\Phi$  истинно во всех полях нулевой характеристики, поэтому  $\mathbb{P} \not\models \neg\Phi$  — противоречие.

Согласно теореме компактности множество  $\Gamma$  не является локально выполнимым. Следовательно, существует невыполнимое конечное множество  $\Omega \subset \Gamma$ .

Если  $\neg\Phi \notin \Omega$ , т.е.  $\Omega$  содержит лишь аксиомы поля и некоторые из формул вида  $\Psi_n$ , то любое поле нулевой характеристики будет моделью  $\Omega$ . Следовательно,  $\neg\Phi \in \Omega$ . Таким образом,

$$\Omega = \{\neg\Phi\} \cup \mathcal{A}' \cup \Pi,$$

где  $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ ,  $\Pi \subseteq \{\Psi_n \mid n < k\}$  для некоторого  $k \in \mathbb{N}$ .

Пусть  $\mathbb{P}$  — поле характеристики  $\geq k$ . Так как  $\mathbb{P} \models \mathcal{A}' \cup \Pi$  и  $\Omega$  невыполнимо, то  $\mathbb{P} \not\models \neg\Phi$ , т.е.  $\mathbb{P} \models \Phi$ . Утверждение доказано.  $\square$

**Пример 2.** В логике первого порядка мы легко можем описать тот факт, что в алгебраической системе существует ровно  $n$  элементов, удовлетворяющих

какому-то условию. В частности, можно описать тот факт, что сама алгебраическая система состоит ровно из  $n$  элементов:

$$\Phi \Leftrightarrow \exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n \left( \bigwedge_{\substack{i,j \leq n \\ i \neq j}} (x_i \neq x_j) \wedge \forall y \bigvee_{i \leq n} (y = x_i) \right).$$

Аналогичным образом описывается наличие  $> n$  и  $< n$  элементов, обладающих каким-то свойством. А можно ли написать формулу, истинность в алгебраической системе которой означала бы, что в этой системе существует бесконечное множество элементов?

**Утверждение.** Не существует формулы логики первого порядка, выражающей существование бесконечного множества элементов с нужным свойством.

**Доказательство.**

Предположим, что такая формула  $\Phi$  существует. Для определённости будем считать, что  $\Phi$  выражает наличие бесконечного множества элементов. Введём обозначения:

$$\Psi_n \Leftrightarrow \exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n \left( \bigwedge_{\substack{i,j \leq n \\ i \neq j}} (x_i \neq x_j) \right) \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$\Gamma = \{\neg\Phi\} \cup \{\Psi_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Истинность формулы  $\Psi_n$  в алгебраической системе означает, что система содержит не менее  $n$  элементов ( $n \in \mathbb{N}$ ).

Любое конечное подмножество  $\Gamma$  имеет модель, так как такое подмножество содержит лишь конечное множество формул вида  $\Psi_n$ . Следовательно, по теореме компактности  $\Gamma$  также имеет модель  $\mathfrak{A}$ . Так как  $\mathfrak{A} \models \neg\Phi$ , то носитель системы  $A$  конечен. Пусть  $|A| = k$ . Тогда  $\mathfrak{A} \not\models \Psi_{k+1}$  — противоречие.  $\square$

## §8. Теорема о существовании модели

**Теорема 10 (о существовании модели).** *Любое непротиворечивое множество формул имеет модель.*

**Доказательство.** Докажем, что любое конечное непротиворечивое множество формул имеет модель.

Пусть  $\Gamma = \{\Psi_1, \dots, \Psi_n\}$  — непротиворечивое множество формул сигнатуры  $\Sigma$ ,  $x_1, \dots, x_k$  — все свободные переменные формул из  $\Gamma$ ,

$$\Phi_0 \Leftrightarrow \exists x_1 \dots \exists x_k (\Psi_1 \wedge \dots \wedge \Psi_n).$$

Если  $\{\Phi_0\}$  противоречиво, т.е.  $\Phi_0 \vdash \Psi \wedge \neg \Psi$  для некоторой формулы  $\Psi$  сигнатуры  $\Sigma$ , то в силу  $\Gamma \vdash \Phi_0$  получим  $\Gamma \vdash \Psi \wedge \neg \Psi$ , что противоречит условию. Следовательно,  $\{\Phi_0\}$  непротиворечиво. Кроме того, любая модель множества  $\Gamma$  является также моделью для  $\Phi_0$ , и наоборот. Поэтому доказательство теоремы можно свести к поиску модели для формулы  $\Phi_0$ . Наконец, так как  $\Phi_0$  содержит лишь конечное множество символов из  $\Sigma$ , то можно считать, что  $\Sigma$  конечна.

Зафиксируем счётное множество констант  $C = \{c_i \mid i \in \omega\}$  такое, что  $\Sigma \cap C = \emptyset$ , и определим сигнатуру  $\Sigma' = \Sigma \cup C$ . Так как алфавит  $\text{ИП}^{\Sigma'}$  счётен, то множество слов этого алфавита счётно, а потому множество всех предложений сигнатуры  $\Sigma'$  также счётно. Пусть  $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_m, \dots$  — все предложения сигнатуры  $\Sigma'$ . Построим цепь  $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \dots \subseteq \Gamma_m \subseteq \dots$  множеств предложений сигнатуры  $\Sigma'$  следующим образом:

1.  $\Gamma_0 = \{\Phi_0\}$ .
2. Предположим, что  $\Gamma_m$  построено. Тогда
  - если  $\Gamma_m \cup \{\Phi_m\}$  противоречиво, то пусть  $\Gamma_{m+1} = \Gamma_m \cup \{\neg \Phi_m\}$ ;
  - если  $\Gamma_m \cup \{\Phi_m\}$  непротиворечиво и  $\Phi_m$  не начинается с квантора  $\exists$ , то пусть  $\Gamma_{m+1} = \Gamma_m \cup \{\Phi_m\}$ ;
  - если  $\Gamma_m \cup \{\Phi_m\}$  непротиворечиво и  $\Phi_m \Leftrightarrow \exists x \Psi(x)$  для некоторой формулы  $\Psi$  сигнатуры  $\Sigma'$ , то пусть  $\Gamma_{m+1} = \Gamma_m \cup \{\Phi_m\} \cup \{\Psi(c)\}$ , где  $c \in C$  — константа, которая не была использована при построении множеств  $\Gamma_0, \dots, \Gamma_m$  и не входит в формулу  $\Phi_m$ .

Положим  $\Gamma_\omega = \bigcup_{i \in \omega} \Gamma_i$ . Дальнейшее доказательство разобьём на несколько лемм.

### Лемма.

1.  $\Gamma_\omega$  непротиворечиво.
2.  $\Phi_i \in \Gamma_\omega$  или  $\neg \Phi_i \in \Gamma_\omega$  для любого  $i \in \omega$ .
3. Если  $\Gamma_\omega \vdash \Phi_i$  для некоторого  $i \in \omega$ , то  $\Phi_i \in \Gamma_\omega$ .
4. Для любых предложений  $\Phi$  и  $\Psi$  сигнатуры  $\Sigma'$ 
  - $\Phi \wedge \Psi \in \Gamma_\omega \iff \Phi \in \Gamma_\omega \text{ и } \Psi \in \Gamma_\omega$ ,
  - $\Phi \vee \Psi \in \Gamma_\omega \iff \Phi \in \Gamma_\omega \text{ или } \Psi \in \Gamma_\omega$ ,
  - $\Phi \rightarrow \Psi \in \Gamma_\omega \iff \Phi \notin \Gamma_\omega \text{ или } \Psi \in \Gamma_\omega$ ,
  - $\neg \Phi \in \Gamma_\omega \iff \Phi \notin \Gamma_\omega$ .
5.  $\exists x \Phi(x) \in \Gamma_\omega \iff \Phi(c) \in \Gamma_\omega$  для некоторого  $c \in C$ .

6.  $\forall x \Phi(x) \in \Gamma_\omega \iff \Phi(c) \in \Gamma_\omega$  для любого  $c \in C$ .
7. Если  $t$  — терм сигнатуры  $\Sigma'$ , не содержащий переменных, то найдётся  $c \in C$  такой, что  $t = c \in \Gamma_\omega$ .

### Доказательство.

1. Согласно [теореме 8 \(п. 4\)](#) достаточно показать, что  $\Gamma_m$  непротиворечиво для любого  $m \in \omega$ . Доказательство проведём индукцией по  $m$ .

Множество  $\Gamma_0$  непротиворечиво по построению.

Предположим, что  $\Gamma_m$  непротиворечиво.

— Если  $\Gamma_m \cup \{\Phi_m\}$  противоречиво, то по определению  $\Gamma_{m+1} = \Gamma_m \cup \{\neg\Phi_m\}$ .

По [теореме 8 \(п. 5\)](#)  $\Gamma_{m+1}$  непротиворечиво.

— Если  $\Gamma_m \cup \{\Phi_m\}$  непротиворечиво и  $\Phi_m$  не начинается с квантора  $\exists$ , то по определению  $\Gamma_{m+1} = \Gamma_m \cup \{\Phi_m\}$  — непротиворечивое множество.

— Пусть  $\Gamma_m \cup \{\Phi_m\}$  непротиворечиво и  $\Phi_m \equiv \exists x \Psi(x)$  для некоторой формулы  $\Psi$  сигнатуры  $\Sigma'$ . Тогда по определению  $\Gamma_{m+1} = \Gamma_m \cup \{\Phi_m\} \cup \{\Psi(c)\}$ , где  $c \in C$  — константа, которая не используется в записи формул множества  $\Gamma_m$  и  $\Phi_m$ . Предположим, что  $\Gamma_{m+1}$  противоречиво, т.е.  $\Gamma_{m+1} \vdash \Theta \wedge \neg\Theta$  для некоторой формулы  $\Theta$  сигнатуры  $\Sigma'$ . Тогда  $\Gamma_m \cup \{\exists x \Psi(x)\} \vdash \Psi(c) \rightarrow \Theta \wedge \neg\Theta$ . Можно считать, что  $c$  не используется в записи формулы  $\Theta$ . Так как символ  $c$  не содержится в записи формул  $\Gamma_m$  и  $\exists x \Psi(x)$ , то при замене  $c$  на переменную  $y$ , не используемую в записи формул  $\Gamma_m$ ,  $\exists x \Psi(x)$  и  $\Theta$ , получим  $\Gamma_m \cup \{\exists x \Psi(x)\} \vdash \Psi(y) \rightarrow \Theta \wedge \neg\Theta$  или  $\Gamma_m \cup \{\Psi(y)\} \vdash \exists x \Psi(x) \rightarrow \Theta \wedge \neg\Theta$ . Поскольку формула  $\Psi(y) \rightarrow \exists x \Psi(x)$  является аксиомой, то  $\Gamma_m \cup \{\Psi(y)\} \vdash \Theta \wedge \neg\Theta$ , т.е.  $\Gamma_m \cup \{\Psi(y)\}$  противоречиво. Но по [теореме 8 \(п. 3\)](#) из непротиворечивости  $\Gamma_m \cup \{\exists x \Psi(x)\}$  следует непротиворечивость множества  $\Gamma_m \cup \{\Psi(y)\}$ . Получили противоречие. Следовательно, наше предположение неверно и  $\Gamma_{m+1}$  непротиворечиво.

2. Следует из построения  $\Gamma_\omega$ .

3. Предположим, что условия утверждения выполнены и  $\Phi_i \notin \Gamma_\omega$ . По пункту 2 леммы  $\neg\Phi_i \in \Gamma_\omega$ . Тогда  $\Gamma_\omega \vdash \Phi_i \wedge \neg\Phi_i$ , что противоречит условию.

4. Следует из свойств выводимости формул и предыдущих пунктов леммы. Докажем, например, что  $\Phi \wedge \Psi \in \Gamma_\omega$  тогда и только тогда, когда  $\Phi \in \Gamma_\omega$  и  $\Psi \in \Gamma_\omega$ .

Так как  $\Phi \wedge \Psi \in \Gamma_\omega$ ,  $\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi$  и  $\Phi \wedge \Psi \vdash \Psi$ , то по пункту 3 леммы  $\Phi, \Psi \in \Gamma_\omega$ .

Наоборот, так как  $\Phi, \Psi \in \Gamma_\omega$  и  $\Phi, \Psi \vdash \Phi \wedge \Psi$  ([свойство 2](#)), то по пункту 3 леммы  $\Phi \wedge \Psi \in \Gamma_\omega$ .

5. Пусть  $\exists x \Phi(x) \in \Gamma_\omega$ . Так как  $\exists x \Phi(x)$  — предложение сигнатуры  $\Sigma'$ , то существует  $i \in \omega$  такое, что  $\Phi_i \equiv \exists x \Phi(x)$ . Так как  $\Gamma_i \cup \{\Phi_i\}$  непротиворечиво, то  $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i \cup \{\Phi_i\} \cup \{\Phi(c)\}$  для некоторого  $c \in C$ . Следовательно,  $\Phi(c) \in \Gamma_\omega$ .

Пусть теперь  $\Phi(c) \in \Gamma_\omega$  для некоторого  $c \in C$ . Так как  $\Phi(c) \rightarrow \exists x \Phi(x)$  — аксиома и  $\Gamma_\omega \vdash \Phi(c)$ , то  $\Gamma_\omega \vdash \exists x \Phi(x)$ , поэтому по пункту 3 леммы  $\exists x \Phi(x) \in \Gamma_\omega$ .

6. Предположим, что  $\forall x \Phi(x) \in \Gamma_\omega$ . Так как  $\forall x \Phi(x) \rightarrow \Phi(c)$  — аксиома для любого  $c \in C$ , то по пункту 3 леммы  $\Phi(c) \in \Gamma_\omega$  для любого  $c \in C$ .

Пусть  $\Phi(c) \in \Gamma_\omega$  для любого  $c \in C$  и  $\forall x \Phi(x) \notin \Gamma_\omega$ . По пункту 2 леммы  $\neg \forall x \Phi(x) \in \Gamma_\omega$ , т.е.  $\exists x \neg \Phi(x) \in \Gamma_\omega$ . По пункту 5 леммы  $\neg \Phi(c) \in \Gamma_\omega$  для некоторого  $c \in C$ . Таким образом,  $\Phi(c) \in \Gamma_\omega$  и  $\neg \Phi(c) \in \Gamma_\omega$  для некоторого  $c \in C$ . Так как  $\Gamma_\omega \vdash \Phi(c) \wedge \neg \Phi(c)$ , то  $\Gamma_\omega$  противоречиво, что не так. Следовательно, если  $\Phi(c) \in \Gamma_\omega$  для любого  $c \in C$ , то  $\forall x \Phi(x) \in \Gamma_\omega$ .

7. Пусть  $t$  — терм сигнатуры  $\Sigma'$ , не содержащий переменных.

$$\begin{aligned} & \vdash [t = x]_t^x \rightarrow \exists x (t = x) \quad (\text{A12}) \quad \xrightarrow{\text{т. дел}} \quad t = t \vdash \exists x (t = x) \quad \xrightarrow{\text{т. 6}} \\ \implies & \vdash \exists x (t = x) \quad \xrightarrow{\text{лем., п. 3}} \quad \exists x (t = x) \in \Gamma_\omega \quad \xrightarrow{\text{лем., п. 5}} \quad \exists c \in C : t = c \in \Gamma_\omega. \end{aligned}$$

Лемма доказана.  $\square$

Определим на множестве  $C$  отношение  $\sim$  следующим образом: для любых  $c, d \in C$

$$c \sim d \iff c = d \in \Gamma_\omega.$$

**Лемма.**  $\sim$  — отношение эквивалентности на  $C$ .

**Доказательство.**

Следует из [теоремы 6](#) и предыдущей леммы.

Так как  $\vdash c = c$  для любого  $c \in C$ , то  $c = c \in \Gamma_\omega$  для любого  $c \in C$ , т.е.  $\sim$  рефлексивно.

Пусть  $c \sim d$  для некоторых  $c, d \in C$ . Тогда по определению  $c = d \in \Gamma_\omega$ . Так как  $c = d \vdash d = c$ , то  $d = c \in \Gamma_\omega$ . Поэтому  $d \sim c$  и  $\sim$  симметрично.

Если  $c \sim d$ ,  $d \sim e$ , то аналогично предыдущим рассуждениям получим  $c \sim e$ , т.е.  $\sim$  транзитивно.  $\square$

Обозначим через  $\tilde{c}$  класс элемента  $c \in C$  по отношению  $\sim$ , через  $\tilde{C}$  — фактор-множество  $C$  по  $\sim$ . Проинтерпретируем сигнатурные символы из  $\Sigma'$  в  $\tilde{C}$  следующим образом:

- $\tilde{c}$  — интерпретация константы  $c \in C$ ,
- для любого символа  $m$ -местной операции  $F \in \Sigma$  и любых  $\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_m, \tilde{d} \in \tilde{C}$

$$F(\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_m) = \tilde{d} \iff F(c_1, \dots, c_m) = d \in \Gamma_\omega,$$

- для любого символа  $m$ -местного предиката  $P \in \Sigma$  и любых  $\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_m \in \tilde{C}$

$$\langle \tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_m \rangle \in P \iff P(c_1, \dots, c_m) \in \Gamma_\omega.$$

**Лемма.** Сигнатурные символы определены корректно, т.е.  $\langle \tilde{C}; \Sigma' \rangle$  — алгебраическая система.

**Доказательство.**

Нам необходимо убедиться в том, что результат операции, как и истинность предиката, на наборе элементов не зависит от выбора представителей соответствующих классов элементов.

Пусть  $F^{(m)} \in \Sigma$ ,  $c_1, \dots, c_m, e_1, \dots, e_m \in C$ ,  $c_i \sim e_i$  ( $i \leq m$ ),  $F(\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_m) = \tilde{d}$  и  $F(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_m) = \tilde{f}$  для некоторых  $d, f \in C$ . Согласно [теореме 6](#) (пункт 4)

$$c_1 = e_1, \dots, c_m = e_m \vdash F(c_1, \dots, c_m) = F(e_1, \dots, e_m),$$

а по пунктам 2 и 3 этой [теоремы](#)

$$F(c_1, \dots, c_m) = d, F(e_1, \dots, e_m) = f, F(c_1, \dots, c_m) = F(e_1, \dots, e_m) \vdash d = f.$$

Следовательно,

$$c_1 = e_1, \dots, c_m = e_m, F(c_1, \dots, c_m) = d, F(e_1, \dots, e_m) = f \vdash d = f.$$

Так как формулы  $c_i = e_i$  ( $i \leq m$ ),  $F(c_1, \dots, c_m) = d$  и  $F(e_1, \dots, e_m) = f$  — элементы множества  $\Gamma_\omega$ , то  $d = f \in \Gamma_\omega$ , поэтому  $d \sim f$  и  $\tilde{d} = \tilde{f}$ .

Корректность определения предикатов проверяется аналогично. □

**Домашнее задание.** Докажите корректность определения предикатов.

И наконец,

**Лемма.**  $\mathfrak{C}' = \langle \tilde{C}; \Sigma' \rangle$  — модель множества  $\Gamma_\omega$ .

**Доказательство.**

Пусть  $\Phi \in \Gamma_\omega$ . Индукцией по сложности  $\Phi$  покажем, что  $\mathfrak{C}' \models \Phi$ .

1.  $\Phi$  — атомарная формула сигнатуры  $\Sigma'$ .

а)  $\Phi \Leftrightarrow t = d$ , где  $t$  — терм сигнатуры  $\Sigma'$ , не содержащий переменных,  $d \in C$ . Рассмотрим этот случай индукцией по сложности термина  $t$ .

— Если  $t \Leftrightarrow c$  для некоторого  $c \in C$ , то в силу  $c = d \in \Gamma_\omega$  получим  $\tilde{c} = \tilde{d}$ , поэтому  $\mathfrak{C}' \models t = g$ .

— Пусть  $t \Leftrightarrow F(t_1, \dots, t_m)$ , где  $t_1, \dots, t_m$  — термы сигнатуры  $\Sigma'$ , не содержащие переменных,  $F^{(m)} \in \Sigma$  и для  $t_i$  ( $i \leq m$ ) утверждение верно. По пункту 7

первой леммы доказательства существует  $c_i \in C$  такой, что  $t_i = c_i \in \Gamma_\omega$  ( $i \leq m$ ). По предположению индукции  $\mathfrak{C}' \models t_i = c_i$ , т.е.  $t_i^{\mathfrak{C}'} = \tilde{c}_i$  для всех  $i \leq m$ . Так как

$$t_1 = c_1, \dots, t_m = c_m, F(t_1, \dots, t_m) = d \vdash F(c_1, \dots, c_m) = d,$$

то по определению  $F$  в  $\mathfrak{C}'$  получим  $t^{\mathfrak{C}'} = F(\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_m) = \tilde{d}$ . Следовательно,  $\mathfrak{C}' \models t = g$ .

б)  $\Phi \Leftrightarrow t = g$ , где  $t, g$  — термы сигнатуры  $\Sigma'$ , не содержащие переменных. Согласно пункту 7 первой леммы доказательства существуют такие  $c, d \in C$ , что  $t = c, g = d \in \Gamma_\omega$ . Так как

$$t = c, g = d, t = g \vdash c = d,$$

то  $c = d \in \Gamma_\omega$ . Из пункта а) следует, что  $t^{\mathfrak{C}'} = \tilde{c}$ ,  $g^{\mathfrak{C}'} = \tilde{d}$  и  $\tilde{c} = \tilde{d}$ . Поэтому  $t^{\mathfrak{C}'} = g^{\mathfrak{C}'}$ , т.е.  $\mathfrak{C}' \models t = g$ .

в)  $\Phi \Leftrightarrow P(t_1, \dots, t_m)$ , где  $t_1, \dots, t_m$  — термы сигнатуры  $\Sigma'$ , не содержащие переменных,  $P^{(m)} \in \Sigma$ . Так как существует  $c_i \in C$  такой, что  $t_i = c_i \in \Gamma_\omega$  ( $i \leq m$ ), то по пункту а)  $t_i^{\mathfrak{C}'} = \tilde{c}_i$ . По [теореме 6](#) (пункт 5)

$$t_1 = c_1, \dots, t_m = c_m, P(t_1, \dots, t_m) \vdash P(c_1, \dots, c_m),$$

поэтому  $P(c_1, \dots, c_m) \in \Gamma_\omega$ . Тогда по определению предиката  $P$  в  $\mathfrak{C}'$  получим  $\langle \tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_m \rangle \in P$ , т.е.  $\mathfrak{C}' \models P(t_1, \dots, t_m)$ .

2.  $\Phi \Leftrightarrow \Psi \wedge \Theta$  ( $\Phi \Leftrightarrow \Psi \vee \Theta$ ,  $\Phi \Leftrightarrow \Psi \rightarrow \Theta$ ,  $\Phi \Leftrightarrow \neg \Psi$ ) для некоторых предложений  $\Psi, \Theta$  сигнатуры  $\Sigma'$ . По первой лемме  $\Psi, \Theta \in \Gamma_\omega$ . По предположению индукции  $\mathfrak{C}' \models \Psi$  и  $\mathfrak{C}' \models \Theta$ . Следовательно,  $\mathfrak{C}' \models \Psi \wedge \Theta$ .

3.  $\Phi \Leftrightarrow \exists x \Psi(x)$  ( $\Phi \Leftrightarrow \forall x \Psi(x)$ ) для некоторой формулы  $\Psi(x)$  сигнатуры  $\Sigma'$ . По первой лемме найдётся  $c \in C$  такой, что  $\Psi(c) \in \Gamma_\omega$ . По предположению индукции  $\mathfrak{C}' \models \Psi(c)$ , поэтому  $\mathfrak{C}' \models \exists x \Psi(x)$ .  $\square$

Рассмотрим алгебраическую систему  $\mathfrak{C} = \langle \tilde{C}; \Sigma \rangle$ , в которой сигнатурные символы из  $\Sigma$  проинтерпретированы на  $\tilde{C}$  так же, как в  $\mathfrak{C}'$ . Очевидно, в  $\mathfrak{C}$  истинны все предложения из  $\Gamma_\omega$ , не содержащие в записи констант из  $C$ . Следовательно,  $\mathfrak{C} \models \Phi_0$ . Модель множества  $\Gamma$  построена.

Нами было доказано, что любое конечное непротиворечивое множество формул имеет модель. Так как любое подмножество непротиворечивого множества формул само непротиворечиво (см. доказательство непротиворечивости  $\{\Phi_0\}$ ), то в силу теоремы компактности получим требуемое.  $\square$

## §9. Теорема Гёделя о полноте ИП

Следующая теорема является следствием из теоремы о существовании модели.

**Теорема 11 (о полноте ИП).** Для любой формулы  $\Phi$  сигнатуры  $\Sigma$

$$\models \Phi \implies \vdash \Phi.$$

**Доказательство.**

Предположим, что это не так, т.е.  $\Phi$  не доказуема.

Множество  $\{\neg\Phi\}$  непротиворечиво. Действительно, если  $\{\neg\Phi\}$  противоречиво, то  $\neg\Phi \vdash \Psi \wedge \neg\Psi$  для некоторой формулы  $\Psi$  сигнатуры  $\Sigma$ . В силу теоремы дедукции, основных эквивалентностей и свойств ИП <sup>$\Sigma$</sup>  получим  $\Psi \vee \neg\Psi \vdash \Phi$ , т.е.  $\Phi$  доказуема, что противоречит нашему предположению.

Согласно теореме о существовании модели множество  $\{\neg\Phi\}$  имеет модель  $\mathfrak{A}$ . Таким образом, существует алгебраическая система  $\mathfrak{A}$  сигнатуры  $\Sigma$  такая, что  $\mathfrak{A} \models \Phi$  и  $\mathfrak{A} \models \neg\Phi$ . Получили противоречие.  $\square$

**Следствие.** Для любой формулы  $\Phi$  сигнатуры  $\Sigma$

$$\models \Phi \iff \vdash \Phi.$$

## §10. Начальные сведения о машинах Тьюринга

*Машина Тьюринга* — абстрактный универсальный исполнитель, предложенный Аланом Тьюрингом в 1936 году для уточнения понятия алгоритма. Для начала дадим нестрогое определение машины Тьюринга. Для доказательства утверждений математической логики (и математики в целом) требуется, конечно же, формальное определение, с которым мы познакомимся позднее.

*Машина Тьюринга* состоит из бесконечной в обе стороны *ленты*, разделённой на ячейки, и *каретки*, которая управляется программой. Каждая ячейка ленты может содержать один символ или быть пустой. В каждый момент времени каретка обозревает одну ячейку ленты.

Пусть задан *внешний алфавит*  $A = \{\lambda, a_1, a_2, \dots\}$  и *внутренний алфавит*  $Q = \{q_0, q_1, q_2, \dots\}$ , элементы которого будем называть *внутренними состояниями каретки*. Символ  $\lambda$  называется *пустым символом* и является обязательным элементом внешнего алфавита. Состояния  $q_0$  и  $q_1$  называются *терминальным (завершающим)* и *начальным* состояниями соответственно и являются обязательными внутренними состояниями каретки.

Любая команда для каретки является словом алфавита  $A \cup \{R, L, E\} \cup Q$  и имеет один из следующих видов:

$$aRq, \quad aLq, \quad aEq,$$

где  $a \in A$ ,  $q \in Q$ . Команда  $aRq$  означает, что каретка должна вписать в обозреваемую ячейку символ  $a$ , переместиться на одну ячейку вправо и перейти в состояние  $q$ . Аналогичным образом интерпретируются команды  $aLq$  и  $aEq$ , где каретка должна переместиться на одну ячейку влево и остаться на месте соответственно.

Программа для машины Тьюринга записывается в виде таблицы, в первый столбец которой записывают внутренние состояния каретки, а в первую строку — элементы внешнего алфавита. Содержимое таблицы представляет собой набор команд для каретки:

|       | $\lambda$ | $a_1$   | $a_2$   | ... |
|-------|-----------|---------|---------|-----|
| $q_1$ | команда   | команда | команда | ... |
| $q_2$ | команда   | команда | команда | ... |
| $q_3$ | команда   | команда | команда | ... |
| ...   | ...       | ...     | ...     | ... |

Символ, который находится в определённый момент времени в обозреваемой кареткой ячейке, называется *считываемым*. Внутреннее состояние каретки, в котором она находится в этот момент времени, называется *текущим*. Команда, которую должна выполнить каретка, находится в таблице на пересечении столбца со считываемым символом и строки с текущим состоянием.

По умолчанию все ячейки ленты пусты, т.е. содержат символ  $\lambda$ . Подготовка к запуску машины Тьюринга состоит из следующих шагов:

- в ячейки ленты записываются символы алфавита  $A$ ,
- задаётся положение каретки.

В начальный момент времени каретка находится в состоянии  $q_1$ , после чего начинается последовательное выполнение команд.

Рассмотрим несколько примеров.

*Унарной системой счисления* называется система счисления, состоящая из одного символа, в которой любое натуральное число  $n \in \omega$  задаётся словом из  $n + 1$  символа. Для решения задач на вычисления в унарной системе счисления будем использовать символ 1. Так, число 0 будет задаваться словом 1, число 1 — 11, число 2 — 111, и т.д.

Тот факт, что в результате выполнений нескольких команд из слова  $S$  машина Тьюринга может получить слово  $S'$ , кратко будем записывать как  $S \vdash S'$ . По умолчанию будем считать, что каретка обозревает крайнюю слева непустую ячейку, если в задаче не сказано противное.

**Пример 1.** Напишем программу для машины Тьюринга, которая вычисляет значение функции  $f(x) = x + 1$  в унарной системе счисления, где  $x \in \omega$ .

Число  $x$  отличается от числа  $x + 1$  количеством единиц. Следовательно, достаточно дописать с какого-нибудь конца данного слова одну единицу. Так как в начальный момент времени каретка обозревает крайнюю слева единицу записанного числа  $x$ , то удобнее сдвинуться влево на одну ячейку и вписать единицу туда:

$$\underbrace{11\dots1}_{x+1} \vdash 1\underbrace{11\dots1}_{x+1}.$$

Программа для машины Тьюринга:

|       |           |         |
|-------|-----------|---------|
|       | $\lambda$ | 1       |
| $q_1$ | $1Eq_0$   | $1Lq_1$ |

**Пример 2.** Напишем программу для машины Тьюринга, которая вычисляет значение функции  $f(x, y) = x + y$  в унарной системе счисления, где  $x, y \in \omega$ . Числа  $x$  и  $y$  записаны на ленте в указанном порядке и отделены друг от друга символом  $+$ .

Опишем логику работы алгоритма. Изначально на ленте записано два слова из  $x + 1$  и  $y + 1$  единиц, разделённые  $+$ . Если заменить разделительный  $+$  на единицу, то получится слово из  $x + y + 3$  единиц. Число  $x + y$  записывается словом из  $x + y + 1$  единицы, т.е. две единицы необходимо стереть. Так как число  $x$  может быть равно 0, то сначала стирать две единицы подряд нельзя — мы можем попасть на  $+$ , что повлечёт выполнение других команд. Можно обойти эту ситуацию, сделав ветвление условий. Но гораздо проще стереть одну единицу сначала и одну единицу в конце:

$$\begin{aligned} \underbrace{11\dots1}_{x+1} + \underbrace{1\dots11}_{y+1} &\vdash \underbrace{1\dots1}_x + \underbrace{1\dots11}_{y+1} \vdash \\ &\vdash \underbrace{1\dots11}_x \underbrace{11\dots11}_{y+1} \vdash \underbrace{1\dots11}_x \underbrace{1\dots1}_y. \end{aligned}$$

Программа для машины Тьюринга:

|       |                |                |         |
|-------|----------------|----------------|---------|
|       | $\lambda$      | 1              | +       |
| $q_1$ |                | $\lambda Rq_2$ |         |
| $q_2$ | $\lambda Lq_3$ | $1Rq_2$        | $1Rq_2$ |
| $q_3$ |                | $\lambda Eq_0$ |         |

В таблице некоторые ячейки пусты. Это можно объяснить тем, что ситуации, в которых потребуется команда из этих ячеек, недостижимы.

**Пример 3.** Напишем программу для машины Тьюринга, которая вычисляет значение функции  $f(x) = 3x$  в унарной системе счисления, где  $x \in \omega$ .

Решить задачу можно следующим образом. В начальный момент времени на ленте находится слово из  $x + 1$  единиц. Заменяем первую единицу на \*, оставив тем самым  $x$  единиц. Уйдём в конец набора единиц. Организуем цикл: на каждую записанную единицу допишем три новых слева от звёздочки. В цикле будет происходить следующее:

- 1) удалим крайнюю справа единицу,
- 2) пройдем влево все оставшиеся единицы,
- 3) пройдем звёздочку,
- 4) пройдем влево все новые единицы,
- 5) допишем три единицы в начало,
- 6) вернёмся в конец.

Выход из цикла произойдёт тогда, когда кончатся единицы справа от звёздочки. Заменяем звёздочку на единицу обратно. На ленте окажется слово из  $3x + 1$  единиц, что и требовалось получить:

$$\underbrace{11\dots 11}_{x+1} \vdash * \underbrace{1\dots 11}_x \vdash 111 * \underbrace{1\dots 1}_{x-1} \vdash$$

$$\vdash 111111 * \underbrace{1\dots 1}_{x-2} \vdash \dots \vdash \underbrace{1\dots 1}_{3x} * \vdash \underbrace{1\dots 1}_{3x} 1.$$

Программа для машины Тьюринга:

|       | $\lambda$      | 1              | *       |
|-------|----------------|----------------|---------|
| $q_1$ |                | $*Rq_2$        |         |
| $q_2$ | $\lambda Lq_3$ | $1Rq_2$        |         |
| $q_3$ |                | $\lambda Lq_4$ | $1Eq_0$ |
| $q_4$ | $1Lq_5$        | $1Lq_4$        | $*Lq_4$ |
| $q_5$ | $1Lq_6$        |                |         |
| $q_6$ | $1Rq_7$        |                |         |
| $q_7$ | $\lambda Lq_3$ | $1Rq_7$        | $*Rq_7$ |

**Определение.** Пусть имеется некоторый исполнитель, который способен выполнять какие-то действия, приводящие к поиску результата применения арифметических операций к натуральным числам. Такой исполнитель будем называть *вычислительным устройством*.

Вообще говоря, вычислительное устройство не обязано реализовывать вычисления согласно правилам арифметики. Главное, что это устройство способно принимать на вход задачу на поиск результата применения операций и выдавать верный ответ.

**Определение.** Вычислительное устройство называется *Тьюринг-эквивалентным*, если оно может эмулировать машину Тьюринга. Задача называется *Тьюринг-полной*, если её можно решить, используя только машину Тьюринга или любую систему, являющуюся Тьюринг-эквивалентной. Формальный язык называется *Тьюринг-полным*, если на нём можно реализовать любую Тьюринг-полную задачу.

Машина Тьюринга теоретически может всё, что могут современные компьютеры, и даже больше (в силу бесконечности ленты). Поэтому любой полный по Тьюрингу язык достаточно универсален, чтобы иметь возможность имитировать любой другой язык.

**Критерий Тьюринг-полноты.** *Если на языке можно реализовать машину Тьюринга, то такой язык Тьюринг-полон, и наоборот.*

На практике определить, является ли какой-то язык Тьюринг-полным или нет, достаточно сложно. Если пользоваться критерием, то придётся написать машину Тьюринга, что может вызвать затраты и по времени, и по объёму. В то же время для решения каких-то практических задач достаточно придерживаться некоторых *условных требований*. А именно:

1. Конечность (нет бесконечных символьных множеств и пр.).
2. Фиксированное описание (формальность).

3. Всегда достаточный объём доступной памяти — в идеале здесь имеется в виду неограниченная память, однако физические рамки не позволяют сделать память ЭВМ бесконечной.

4. Неограниченность времени выполнения — любая программа должна иметь возможность работать до тех пор, пока не завершится.

5. Возможность функциональной композиции (вызов одной функции из другой, рекурсия).

6. Наличие циклов *while* с прерыванием или эквивалентных им конструкций.

7. Возможность останавливать выполнение или каким-то образом подавать сигнал о результатах выполнения.

8. Представление множества натуральных чисел, понятие нуля и следующего числа. Возможны другие подобные системы.

9. Поддержка входных и выходных данных, причём без формальных ограничений в объёме.

## §11. Проблема остановки

**Проблема.** *Существует ли алгоритм, который для любой процедуры и любых входных данных определяет, завершается ли когда-нибудь выполнение этой процедуры с этими данными или нет?*

Алан Тьюринг доказал в 1936 году, что проблема остановки неразрешима, на машине Тьюринга. Другими словами, не существует общего алгоритма решения этой проблемы.

**Теорема 12.** *Проблема остановки неразрешима.*

### **Доказательство.**

Рассмотрим множество  $S$  алгоритмов, которые принимают на вход натуральное число и на выходе тоже выдают натуральное число. Выберем какой-нибудь полный по Тьюрингу язык. Каждый алгоритм можно записать в виде конечной последовательности символов на этом языке.

Упорядочим множество  $S$  (это возможно, поскольку оно является множеством конечных последовательностей элементов конечного множества и потому счётно), при этом каждый алгоритм получит свой порядковый номер.

Назовем *Анализатором* гипотетический алгоритм, который получает на вход пару натуральных чисел  $(N, X)$  и:

- останавливается и возвращает 1, если алгоритм с номером  $N$  не останавливается, получив на вход  $X$ ,

- не останавливается в противном случае (если алгоритм с номером  $N$  останавливается, получив на вход  $X$ ).

Проблему остановки можно переформулировать следующим образом: существует ли Анализатор?

**Лемма.** *Анализатор не существует.*

Докажем это от противного. Допустим, Анализатор существует. Напишем алгоритм *Диагонализатор*, который принимает на вход число  $N$ , передает пару аргументов  $(N, N)$  Анализатору и возвращает результат его работы. Другими словами, *Диагонализатор останавливается в том и только том случае, если не останавливается алгоритм с номером  $N$ , получив на вход число  $N$ .*

Так как Диагонализатор получает на вход натуральное число и на выходе возвращает натуральное число, то Диагонализатор принадлежит множеству  $S$ . Пусть  $K$  — это порядковый номер Диагонализатора в  $S$ . Запустим Диагонализатор, передав ему это число  $K$ . Диагонализатор остановится в том и только том случае, если алгоритм с номером  $K$  (то есть, он сам) не останавливается, получив на вход число  $K$  (какое мы ему и передали). Из этого противоречия следует, что наше предположение неверно: Анализатор не существует, что и требовалось доказать.  $\square$

Для многих других задач можно доказать их алгоритмическую неразрешимость, попытавшись свести их к проблеме остановки. Это делается по схеме «от противного»: пусть есть некая задача, для которой требуется установить её неразрешимость. Тогда предположим, что она разрешима, и попытаемся, используя этот факт, написать алгоритм решения проблемы остановки. Если это удастся, то мы придём к противоречию, ведь известно, что не существует алгоритма решения проблемы остановки. А значит, предположение было неверным и исходная задача также неразрешима.

## §12. Неразрешимость ИП

Как уже отмечалось ранее, алгоритмическая разрешимость теории — очень сильное свойство. Наличие универсального алгоритма решения всех математических задач (или какого-то частного класса задач) свело бы математику к поиску такого алгоритма, оставив непосредственное решение задач на второй план. В этом параграфе будет доказана неразрешимость логики первого порядка для случая, когда сигнатура содержит хотя бы один трёхместный предикат.

Многие другие случаи требуют более серьёзной математической подготовки, которая выходит за рамки нашего курса.

Пусть машина Тьюринга  $\mathfrak{M}_s$  работает над словом  $s$  длины  $n \in \omega$ . Опишем формульно эту машину. Введём обозначения:

$\mathcal{A} = \{a_0, a_1, \dots, a_m\}$  — внешний алфавит  $\mathfrak{M}_s$ , где  $a_0 = \lambda$ ,

$\mathcal{Q} = \{q_0, q_1, \dots, q_r\}$  — внутренний алфавит состояний  $\mathfrak{M}_s$ ,

$s = a_{s_1} a_{s_2} \dots a_{s_n}$ , где  $s_i \leq m$  для любого  $i \leq n$ ,

$p_1, p_2, \dots, p_l$  — программа машины  $\mathfrak{M}_s$ .

Зададим сигнатуру

$$\Sigma_{\mathfrak{M}_s} = \left\{ T^{(1)}, N^{(2)}, S^{(1)}, L^{(2)}, 0^{(0)}, I^{(2)} \right\} \cup \left\{ 1^{(0)}, 2^{(0)}, \dots, n^{(0)} \right\} \cup \\ \cup \left\{ A_j^{(2)} \mid 0 \leq j \leq m \right\} \cup \left\{ Q_k^{(1)} \mid 0 \leq k \leq r \right\}$$

со следующей интерпретацией предикатных символов на  $\mathbb{Z}$ :

$t \in T \iff t$  является моментом времени,

$\langle t_1, t_2 \rangle \in N \iff t_2$  следует непосредственно за  $t_1$ ,

$s \in S \iff s$  является номером ячейки ленты,

$\langle s_1, s_2 \rangle \in L \iff$  ячейка с номером  $s_1$  находится непосредственно слева от ячейки с номером  $s_2$ ,

$\langle t, s \rangle \in I \iff$  в момент времени  $t$  обозревается ячейка с номером  $s$ ,

$t \in Q_k \iff$  в момент времени  $t$  машина  $\mathfrak{M}_s$  находится в состоянии  $q_k \in \mathcal{Q}$ ,

$\langle t, s \rangle \in A_j \iff$  в момент времени  $t$  в ячейке с номером  $s$  находится символ  $a_j \in \mathcal{A}$ .

### Аксиомы машины Тьюринга $\mathfrak{M}_s$

Ниже приведён список формул сигнатуры  $\Sigma_{\mathfrak{M}_s}$ , которые с указанной интерпретацией сигнатурных символов описывают устройство и начальное состояние машины  $\mathfrak{M}_s$ :

$$\text{MT}_1 \iff T(0)$$

константа 0 является моментом времени,

$$\text{MT}_2 \iff \forall x (T(x) \rightarrow \neg N(x, 0))$$

моменту времени 0 ничего не предшествует,

$$MT_3 \Leftrightarrow \forall x (T(x) \rightarrow \neg N(x, x))$$

ни один момент времени не следует за самим собой,

$$MT_4 \Leftrightarrow \forall x (T(x) \rightarrow \exists y (T(y) \wedge N(x, y)))$$

за каждым моментом времени следует момент времени,

$$MT_5 \Leftrightarrow \forall x \forall y_1 \forall y_2 (T(x) \wedge T(y_1) \wedge T(y_2) \wedge N(x, y_1) \wedge N(x, y_2) \rightarrow (y_1 = y_2))$$

за каждым моментом времени может следовать только один момент,

$$MT_6 \Leftrightarrow \forall x_1 \forall x_2 \forall y (T(x_1) \wedge T(x_2) \wedge T(y) \wedge N(x_1, y) \wedge N(x_2, y) \rightarrow (x_1 = x_2))$$

каждому моменту времени может предшествовать только один момент,

$$MT_7 \Leftrightarrow S(1) \wedge \dots \wedge S(n) \wedge L(1, 2) \wedge L(2, 3) \wedge \dots \wedge L(n-1, n)$$

константы  $1, 2, \dots, n$  являются номерами ячеек, причём ячейка 1 слева от 2, ячейка 2 слева от 3 и т.д.,

$$MT_8 \Leftrightarrow \forall x (S(x) \rightarrow \neg L(x, x))$$

ни одна ячейка не находится левее самой себя,

$$MT_9 \Leftrightarrow \forall x (S(x) \rightarrow \exists y (S(y) \wedge L(x, y)))$$

правее каждой ячейки есть ячейка,

$$MT_{10} \Leftrightarrow \forall x \forall y_1 \forall y_2 (S(x) \wedge S(y_1) \wedge S(y_2) \wedge L(x, y_1) \wedge L(x, y_2) \rightarrow (y_1 = y_2))$$

правее каждой ячейки может быть только одна ячейка,

$$MT_{11} \Leftrightarrow \forall x (S(x) \rightarrow \exists y (S(y) \wedge L(y, x)))$$

левее каждой ячейки есть ячейка,

$$MT_{12} \Leftrightarrow \forall x_1 \forall x_2 \forall y (S(x_1) \wedge S(x_2) \wedge S(y) \wedge L(x_1, y) \wedge L(x_2, y) \rightarrow (x_1 = x_2))$$

левее каждой ячейки может быть только одна ячейка.

### *Построение характеристической формулы машины $\mathfrak{M}_5$*

Следующие формулы сигнатуры  $\Sigma_{\mathfrak{M}_5}$  с указанной интерпретацией описывают принцип работы машины  $\mathfrak{M}_5$  (смена состояний, считывание и записывание символов, движение каретки по ленте):

$$\Phi_1 \Leftrightarrow \forall x (T(x) \rightarrow \exists y (S(y) \wedge I(x, y) \wedge \neg \forall y_1 \forall y_2 (S(y_1) \wedge S(y_2) \wedge \neg (y_1 = y_2) \rightarrow \neg (I(x, y_1) \wedge I(x, y_2)))))$$

в каждый момент времени обозревается ровно одна ячейка,

$$\Phi_2 \Leftrightarrow \forall x \forall y (T(x) \wedge S(y) \rightarrow \bigvee_{j \leq m} A_j(x, y) \wedge \bigwedge_{\substack{i, j \leq m \\ i \neq j}} \neg (A_i(x, y) \wedge A_j(x, y)))$$

в каждый момент времени в каждой ячейке находится ровно один символ алфавита,

$$\Phi_3 \Leftrightarrow \forall x (T(x) \rightarrow \bigvee_{k \leq r} Q_k(x) \wedge \bigwedge_{\substack{k, l \leq r \\ k \neq l}} \neg (Q_k(x) \wedge Q_l(x)))$$

в каждый момент времени машина находится ровно в одном состоянии,

$$\Phi_4 \Leftrightarrow Q_1(0) \wedge I(0, 1) \wedge \bigwedge_{1 \leq i \leq n} A_{s_i}(0, i) \wedge \forall y (S(y) \wedge \bigwedge_{i \leq n} \neg(y = i) \rightarrow A_0(0, y))$$

в момент времени 0 машина находится в состоянии  $q_1$ , каретка обозревает ячейку с номером 1, в ячейке с номером  $i$  записан символ  $a_{s_i}$  ( $1 \leq i \leq n$ ), а во всех остальных ячейках находится символ  $a_0$  (т.е. ячейки пусты),

$$\begin{aligned} \Phi_5 \Leftrightarrow \forall x_1 \forall x_2 \forall y (T(x_1) \wedge T(x_2) \wedge N(x_1, x_2) \wedge S(y) \wedge \neg I(x_1, y) \rightarrow \\ \rightarrow \bigwedge_{j \leq m} ((A_j(x_1, y) \wedge A_j(x_2, y)) \vee (\neg A_j(x_1, y) \wedge \neg A_j(x_2, y)))) \end{aligned}$$

если ячейка в какой-то момент времени не обозревается, то в следующий момент времени она содержит прежний символ,

$$\Theta \Leftrightarrow \exists x Q_0(x)$$

в какой-то момент времени машина переходит в состояние  $q_0$  (останавливает работу).

Если команда  $p_i$  ( $i \leq l$ ) имеет вид  $a_{j_1} q_{k_1} \rightarrow a_{j_2} L q_{k_2}$ , то пусть

$$\begin{aligned} \Psi_i \Leftrightarrow \forall x_1 \forall x_2 \forall y_1 \forall y_2 (T(x_1) \wedge T(x_2) \wedge N(x_1, x_2) \wedge \\ \wedge S(y_1) \wedge S(y_2) \wedge L(y_2, y_1) \wedge I(x_1, y_1) \wedge Q_{k_1}(x_1) \wedge A_{j_1}(x_1, y_1) \rightarrow \\ \rightarrow A_{j_2}(x_2, y_1) \wedge I(x_2, y_2) \wedge Q_{k_2}(x_2)) \end{aligned}$$

Если команда  $p_i$  ( $i \leq l$ ) имеет вид  $a_{j_1} q_{k_1} \rightarrow a_{j_2} R q_{k_2}$ , то пусть

$$\begin{aligned} \Psi_i \Leftrightarrow \forall x_1 \forall x_2 \forall y_1 \forall y_2 (T(x_1) \wedge T(x_2) \wedge N(x_1, x_2) \wedge \\ \wedge S(y_1) \wedge S(y_2) \wedge L(y_1, y_2) \wedge I(x_1, y_1) \wedge Q_{k_1}(x_1) \wedge A_{j_1}(x_1, y_1) \rightarrow \\ \rightarrow A_{j_2}(x_2, y_1) \wedge I(x_2, y_2) \wedge Q_{k_2}(x_2)) \end{aligned}$$

Если команда  $p_i$  ( $i \leq l$ ) имеет вид  $a_{j_1} q_{k_1} \rightarrow a_{j_2} E q_{k_2}$ , то пусть

$$\begin{aligned} \Psi_i \Leftrightarrow \forall x_1 \forall x_2 \forall y (T(x_1) \wedge T(x_2) \wedge N(x_1, x_2) \wedge \\ \wedge S(y) \wedge I(x_1, y) \wedge Q_{k_1}(x_1) \wedge A_{j_1}(x_1, y) \rightarrow \\ \rightarrow A_{j_2}(x_2, y) \wedge I(x_2, y) \wedge Q_{k_2}(x_2)) \end{aligned}$$

Пусть

$$\Phi_{\mathfrak{M}_5} \Leftrightarrow \bigwedge_{1 \leq i \leq 12} M T_i \wedge \bigwedge_{1 \leq i \leq 5} \Phi_i \wedge \bigwedge_{1 \leq i \leq l} \Psi_i \rightarrow \Theta.$$

**Лемма.**  $\models \Phi_{\mathfrak{M}_5} \iff \mathfrak{M}_5$  останавливается.

**Доказательство.**

*Необходимость.* Рассматривая машину Тьюринга  $\mathfrak{M}_s$  как алгебраическую систему сигнатуры  $\Sigma_{\mathfrak{M}_s}$ , получим истинность в ней посылки формулы  $\Phi_{\mathfrak{M}_s}$ . Так как  $\Phi_{\mathfrak{M}_s}$  тождественно истинная, то в этой машине истинна также формула  $\Theta$ , т.е. машина Тьюринга  $\mathfrak{M}_s$  останавливается на входном слове  $s$ .

*Достаточность.* Аналогично, если машина Тьюринга  $\mathfrak{M}_s$  останавливается на входном слове  $s$  и  $\mathfrak{A} \models \bigwedge_{1 \leq i \leq 12} MT_i \wedge \bigwedge_{1 \leq i \leq 5} \Phi_i \wedge \bigwedge_{1 \leq i \leq l} \Psi_i$ , то система  $\mathfrak{A}$  может восприниматься как машина Тьюринга  $\mathfrak{M}_s$ . Так как она останавливается, то  $\mathfrak{A} \models \Theta$ . Следовательно,  $\Phi_{\mathfrak{M}_s}$  тождественно истинная.  $\square$

**Теорема 13.** *Исчисление предикатов сигнатуры, содержащей хотя бы один символ трёхместного предиката, неразрешимо.*

**Доказательство.** Воспользуемся приведённой в предыдущем параграфе схемой доказательства.

Пусть сигнатура  $\Sigma$  содержит символ трёхместного предиката  $P$ . Для каждой формулы  $\Phi$  множества

$$\{MT_i \mid 1 \leq i \leq 12\} \cup \{\Phi_i \mid 1 \leq i \leq 5\} \cup \{\Psi_i \mid 1 \leq i \leq l\} \cup \{\Theta\}$$

построим формулу  $\Phi'$ , заменив термы и атомарные формулы  $\Sigma_{\mathfrak{M}_s}$  в  $\Phi$  следующим образом (под  $*$  и  $\times$  понимаются термы сигнатуры  $\Sigma_{\mathfrak{M}_s}$ ):

— константы  $0, 1, \dots, n$  заменим на переменные  $u_0, u_1, \dots, u_n$  соответственно,

- формулу  $T(*)$  заменим на  $P(*, *, z_0)$ ,
- формулу  $N(*, \times)$  заменим на  $P(*, \times, z_1)$ ,
- формулу  $S(*)$  заменим на  $P(*, *, z_2)$ ,
- формулу  $L(*, \times)$  заменим на  $P(*, \times, z_3)$ ,
- формулу  $I(*, \times)$  заменим на  $P(*, \times, z_4)$ ,
- для всех  $j \leq t$  формулу  $A_j(*, \times)$  заменим на  $P(*, \times, z_{5+j})$ ,
- для всех  $k \leq r$  формулу  $Q_k(*)$  заменим на  $P(*, *, z_{6+m+k})$ .

Например,

$$MT'_1 \Leftrightarrow P(u_0, u_0, z_0),$$

$$MT'_5 \Leftrightarrow \forall x \forall y_1 \forall y_2 (P(x, x, z_0) \wedge P(y_1, y_1, z_0) \wedge P(y_2, y_2, z_0) \wedge \\ \wedge P(x, y_1, z_1) \wedge P(x, y_2, z_1) \rightarrow (y_1 = y_2)),$$

$$\Phi'_4 \Leftrightarrow P(u_0, u_0, z_{6+m+1}) \wedge P(u_0, u_1, z_4) \wedge \bigwedge_{1 \leq i \leq n} P(u_0, u_i, z_{5+s_i}) \wedge \\ \wedge \forall y (P(y, y, z_2) \wedge \bigwedge_{i \leq n} \neg(y = u_i) \rightarrow P(u_0, y, z_5)),$$

$\Theta' \Leftrightarrow \exists x P(x, x, z_{6+m})$  и т.д.

Пусть  $\Phi'_{\mathfrak{M}_s} \Leftrightarrow \exists z_0 \dots \exists z_{6+m+r} \left( \bigwedge_{i \neq j} z_i \neq z_j \wedge \right.$   
 $\left. \wedge \left( \exists u_0 \dots \exists u_n \left( \bigwedge_{1 \leq i \leq 12} MT'_i \wedge \bigwedge_{1 \leq i \leq 5} \Phi'_i \wedge \bigwedge_{1 \leq i \leq l} \Psi'_i \right) \rightarrow \Theta' \right) \right).$

По аналогии с предыдущей леммой получим

$$\models \Phi'_{\mathfrak{M}_s} \iff \mathfrak{M}_s \text{ останавливается.}$$

Предположим, что исчисление предикатов сигнатуры  $\Sigma$  разрешимо. Согласно определению, существует алгоритм, который для абсолютно любой формулы сигнатуры  $\Sigma$  за конечное число шагов позволяет установить, доказуема эта формула или нет. Но тогда этот алгоритм позволяет установить доказуемость формул  $\Phi'_{\mathfrak{M}_s}$  для всех машин Тьюринга  $\mathfrak{M}_s$ . Следовательно, существует алгоритм, который для любой машины Тьюринга  $\mathfrak{M}$  и любого входного слова  $s$  позволяет установить, останавливается ли машина  $\mathfrak{M}$  на  $s$  или нет. Таким образом, проблема остановки разрешима. Получили противоречие.  $\square$

Нами был показан частный случай сигнатуры, для которой исчисление предикатов неразрешимо. Приведём несколько более общих утверждений, доказательство которых после можно найти, например, в [?].

**Теорема 14.** *Исчисление предикатов сигнатуры, состоящей из не более чем счётного числа одноместных предикатов, разрешимо.*

**Теорема 15.** *Если сигнатура  $\Sigma$  содержит по крайней мере один предикатный символ местности  $\geq 2$  или по крайней мере один символ операции местности  $\geq 2$ , то исчисление предикатов сигнатуры  $\Sigma$  неразрешимо.*

Другие примеры разрешимых и неразрешимых исчислений можно найти в [?]:

**Теорема 16.** *Исчисление предикатов сигнатуры, состоящей из одной одноместной операции, разрешимо.*

**Теорема 17.** *Исчисление предикатов сигнатуры, состоящей из не менее двух одноместных операций, неразрешимо.*

## §13. Независимость ИП

Конечно, для исчисления предикатов также хотелось бы иметь независимую систему аксиом. В целом это требование носит скорее эстетичный характер и на какие-то формальные аспекты никак не влияет. Наоборот, кажется, будто расширение множества аксиом позволяет облегчить поиск доказательства теорем. Однако, для более глубокого познания теории от всего лишнего лучше ограничиться.

**Теорема 18 (о независимости ИП).** *ИП независимо.*

### Доказательство.

В основе доказательства независимости аксиомы  $A$  лежит та же идея, что и в теореме 7 главы III. Возьмём некоторую алгебраическую систему  $\mathfrak{M}$  и интерпретируем логические связки и кванторы таким образом, чтобы в  $\mathfrak{M}$  все аксиомы ИП, за исключением  $A$ , принимали значение  $f_0$ , а правила вывода сохраняли свойство принимать значение  $f_0$ . Очевидно, аксиома  $A$  не может быть получена из других аксиом: в противном случае она также принимала бы значение  $f_0$  в  $\mathfrak{M}$ .

Доказательство независимости аксиом 1–10 аналогично. Докажем, например, что аксиома  $\forall x \Phi \rightarrow [\Phi]_t^x$  независима. Для этого достаточно полагать, что все логические связки, символ  $=$  и квантор  $\exists$  интерпретируются стандартно, а формулы, начинающиеся с квантора  $\forall$ , истинны во всех алгебраических системах. Ясно, что все аксиомы 1–10 и 12–14 по-прежнему истинны во всех алгебраических системах, а правила вывода 1 и 3 сохраняют это свойство. Кроме того, так как в формуле  $\Psi \rightarrow \forall x \Theta$  заключение истинно во всех системах, то правило вывода 2 так же позволяет из истинной в системе формулы получать только истинную формулу. Наконец, если  $a \in M$  такое, что  $\Phi(a)$  ложна, то  $\mathfrak{M} \not\models \forall x \Phi \rightarrow \Phi(a)$ .

Доказательство независимости остальных аксиом ИП представляется читателю в качестве упражнения. □