

Второй Приморский математический турнир
Отборочный тур, 3 декабря 2023 г.

Правила

- На выполнение заданий даётся *60 минут*.
- Решите задачу, запишите ответ в *бланке ответов* и покажите его проверяющему.
- Запишите *подробное решение* задачи 5 в каждом блоке и сдайте его проверяющему.
- За каждый неверный ответ *снимается* один балл.
- *Бонусы*:
 - первыми получили ответ на вопрос: +1 балл,
 - первыми получили ответы на все вопросы из блока: +2 балла.

Бланк ответов

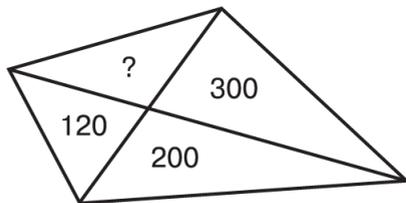
задание	ответ	отметка	время	примечание
<i>Числа и вычисления</i>				
1				
2				
3				
4				
5				
<i>Фигуры</i>				
6				
7				
8				
9				
10				
<i>Рассуждения</i>				
11				
12				
13				
14				
15				

1. 2 балла. Найдите xy , если $12^y = 81$, $3^x = 12$.
2. 2 балла. Трёхзначное число x записано цифрами 1, 2, 3 в некотором порядке, а трёхзначное число y — цифрами 4, 5, 6 в некотором порядке. Известно, что последняя цифра суммы $x + y$ чётна, и что вторая цифра числа x равна 2. Какова последняя цифра произведения xy ?
3. 2 балла. На Приморском математическом турнире было предложено решить 30 задач. За каждую задачу 1–10 можно было получить 3 балла, за задачи 11–20 — по 4 балла, а задачи 21–30 оценивались в 5 баллов за каждую. Ваня сначала выбрал 3 особенно понравившиеся ему задачи и решил их, потратив по 3 минуты на каждую. Оставшиеся 66 минут он распределил между остальными 27 задачами пропорционально количеству баллов, даваемых за задачу. Какое наименьшее суммарное время он мог затратить на решение всех десяти четырехбалльных задач?
4. 3 балла. Известно, что для натурального n числа $n + 27$ и $n - 62$ — точные квадраты. Найдите все n .
5. 4 балла, подробное решение. Сколько пар натуральных чисел (a, b) , где $a \leq b$, удовлетворяют равенству

$$\text{НОК}(a, b) = \text{НОД}(a, b) + 10?$$

Фигуры

6. 2 балла. Трёхметровые и шестиметровый шесты стоят вертикально на ровной площадке. Между ними натянуты две верёвки — от вершины каждого из них до основания другого. На какой высоте находится точка, в которой эти верёвки касаются друг друга?
7. 2 балла. На плоскости отмечены три точки, не лежащие на одной прямой. Назовём прямую *особой*, если эти три точки одинаково удалены от неё. Сколько особых прямых можно провести на этой плоскости?
8. 3 балла. Четырёхугольный пирог разрезали по диагонали на 4 куса. Три куска взвесили — получилось 120, 200 и 300 граммов. А четвёртый кусок съели. Сколько весил съеденный кусок?



9. 3 балла. Пусть ABC — треугольник со сторонами $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Чему равно отношение, в котором центр вписанной в ABC окружности делит биссектрису угла B ?
10. 4 балла, подробное решение. Сколько различных равнобедренных треугольников с боковыми сторонами 1 см могут быть разрезаны на два равнобедренных треугольника?

11. *2 балла.* Учитель задал на дом трудную задачу. В результате оказалось, что в классе количество мальчиков, решивших её, равно количеству девочек, её не решивших. Выберите все верные утверждения:
- (а) Учеников, решивших задачу, больше, чем девочек в классе.
 - (б) Учеников, решивших задачу, меньше, чем девочек в классе.
 - (с) Учеников, решивших задачу, столько же, сколько и девочек в классе.
 - (d) Среди учеников, решивших задачу, мальчиков больше, чем девочек.
 - (е) Мальчиков, не решивших задачу, больше, чем девочек в классе.
12. *2 балла.* В автомобильных гонках участвовали три машины. Они стартовали в таком порядке: сначала «Ягуар», потом «Феррари», потом «Мерседес». На дистанции «Ягуар» обогнали 3 раза, «Феррари» — 5 раз, а «Мерседес» — 8 раз. В каком порядке машины пришли к финишу?
13. *3 балла.* Вилли написал на листе два числа. В качестве третьего числа он написал сумму первого и второго, в качестве четвертого — сумму второго и третьего и т.д., пока не написал шестое число. Потом он сложил все шесть полученных чисел и заметил, что если знать такую сумму, то всегда можно точно определить, каким было одно из шести слагаемых. Какое?

14. *3 балла.* На доске написано 20 чисел от 1 до 20. Двое по очереди ставят перед этими числами знак «+» или «-» (знак можно ставить перед любым числом, перед которым он ещё не стоит, включая первое). Игра заканчивается после того, как проставлены все 20 знаков, затем вычисляется результат. Первый хочет добиться, чтобы он был по абсолютной величине как можно меньше, а второй — как можно больше. Какое наибольшее по абсолютной величине значение может обеспечить в итоге второй игрок?
15. *4 балла, подробное решение.* В математическом бое участвовало пять команд — A , B , C , D и E . Каждая команда сыграла с каждой ровно один раз. За победу в игре даётся 2 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0. В протоколе боя у судьи записано, что команда B , занявшая второе место, набрала больше очков, чем C , D и E вместе. Не ошибся ли судья?