

ИДЗ №10. Линейная независимость и базис

Как обычно, каждый студент выбирает вариант, соответствующий номеру в приведённом списке. Обратите внимание: номера вариантов изменились!

ИДЗ нужно решить самостоятельно (!), оформить на двойном чистом целом листочке и сдать где-нибудь между майскими поездками на шашлыки. Все решения **должны быть отражены** на листочке. С учётом того, что тут вычислений почти нет, прошу аккуратненько переписать в чистовик всё, что Вы начёркали у себя в черновиках.

Успехов в жарке шашлычков выполнении домашней работы!

**Варианты**

- |                      |                          |
|----------------------|--------------------------|
| 1. Белова Амина      | 8. Попова Ангелина       |
| 2. Бойко Вероника    | 9. Бысь Анастасия        |
| 3. Волкова Алина     | 10. Рожкова Виктория     |
| 4. Кайгородова Анна  | 11. Сабанцева Полина     |
| 5. Калмыкова Эльвира | 12. Свириденко Анастасия |
| 6. Кисарова Мария    | 13. Тулисова Елизавета   |
| 7. Кухарь Мария      | 14. Усик Екатерина       |

**Задание №1.** Докажите, что векторы  $\bar{a}_1, \bar{a}_2$  и  $\bar{a}_3$  образуют базис пространства  $\mathbb{R}^3$ , и найдите координаты вектора  $\bar{b}$  в этом базисе.

1.  $\bar{a}_1 = (2, 1, 0),$   
 $\bar{a}_2 = (2, 2, -1),$   
 $\bar{a}_3 = (4, 1, 4),$   
 $\bar{b} = (-14, 1, -20).$

8.  $\bar{a}_1 = (-1, 2, -4),$   
 $\bar{a}_2 = (4, 4, 3),$   
 $\bar{a}_3 = (1, 0, -3),$   
 $\bar{b} = (11, 10, -10).$

2.  $\bar{a}_1 = (-3, 3, 3),$   
 $\bar{a}_2 = (2, 3, 2),$   
 $\bar{a}_3 = (1, -4, 1),$   
 $\bar{b} = (12, 5, 6).$

9.  $\bar{a}_1 = (3, -1, -4),$   
 $\bar{a}_2 = (-1, 3, 3),$   
 $\bar{a}_3 = (4, 4, 1),$   
 $\bar{b} = (15, 11, 2).$

3.  $\bar{a}_1 = (-2, 4, -2),$   
 $\bar{a}_2 = (3, -3, -1),$   
 $\bar{a}_3 = (3, -1, -1),$   
 $\bar{b} = (-10, 4, 6).$

10.  $\bar{a}_1 = (3, 1, 3),$   
 $\bar{a}_2 = (-2, -3, 1),$   
 $\bar{a}_3 = (-2, -2, -1),$   
 $\bar{b} = (-6, 2, -14).$

4.  $\bar{a}_1 = (1, 4, -2),$   
 $\bar{a}_2 = (-3, 1, -3),$   
 $\bar{a}_3 = (-3, 1, -1),$   
 $\bar{b} = (14, -22, 22).$

11.  $\bar{a}_1 = (1, 4, -2),$   
 $\bar{a}_2 = (-3, -2, 3),$   
 $\bar{a}_3 = (-2, 1, 3),$   
 $\bar{b} = (10, 27, -11).$

5.  $\bar{a}_1 = (3, -3, 4),$   
 $\bar{a}_2 = (-4, -3, -3),$   
 $\bar{a}_3 = (4, -1, -1),$   
 $\bar{b} = (1, -10, -17).$

12.  $\bar{a}_1 = (-1, -1, 1),$   
 $\bar{a}_2 = (0, 2, 2),$   
 $\bar{a}_3 = (-4, -1, 4),$   
 $\bar{b} = (0, 1, -2).$

6.  $\bar{a}_1 = (2, -3, 1),$   
 $\bar{a}_2 = (1, 1, 1),$   
 $\bar{a}_3 = (1, -4, 1),$   
 $\bar{b} = (-6, -11, -3).$

13.  $\bar{a}_1 = (-2, 1, -2),$   
 $\bar{a}_2 = (-4, 4, -4),$   
 $\bar{a}_3 = (3, 3, 1),$   
 $\bar{b} = (0, -26, 8).$

7.  $\bar{a}_1 = (2, 3, -2),$   
 $\bar{a}_2 = (-1, -1, 3),$   
 $\bar{a}_3 = (0, 3, 1),$   
 $\bar{b} = (-8, 1, 16).$

14.  $\bar{a}_1 = (0, -2, -2),$   
 $\bar{a}_2 = (2, -1, 0),$   
 $\bar{a}_3 = (-2, -1, -3),$   
 $\bar{b} = (8, -6, 0).$

**Задание №2.** Векторы  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4$  и вектор  $\bar{x}$  пространства  $L$  над полем  $\mathbb{R}$  заданы в стандартном базисе своими координатами.

Докажите, что системы векторов  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4$  и  $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3, \bar{b}_4$  являются базисами пространства  $L$ . Найдите координаты вектора  $\bar{x}$  в этих базисах.

Указание: задача должна быть решена с помощью матрицы перехода от одного базиса к другому.

1.  $\bar{x}(-29, -16, 10, -5),$   
 $\bar{a}_1(4, -3, -3, -1),$   
 $\bar{a}_2(-3, 1, 3, 0),$   
 $\bar{a}_3(2, -3, 2, -4),$   
 $\bar{a}_4(-4, -4, -4, 2),$   
 $\bar{b}_1 = -2\bar{a}_1 + \bar{a}_2 - 3\bar{a}_3 - 3\bar{a}_4,$   
 $\bar{b}_2 = 2\bar{a}_1 - 4\bar{a}_2 + \bar{a}_3 + 2\bar{a}_4,$   
 $\bar{b}_3 = -3\bar{a}_1 + 3\bar{a}_2 - 2\bar{a}_3 - 3\bar{a}_4,$   
 $\bar{b}_4 = \bar{a}_1 + \bar{a}_3 + \bar{a}_4.$
2.  $\bar{x}(-17, 36, 9, 48),$   
 $\bar{a}_1(0, -2, 0, -2),$   
 $\bar{a}_2(4, 0, 0, -4),$   
 $\bar{a}_3(2, 4, 3, 3),$   
 $\bar{a}_4(-3, 4, -1, 4),$   
 $\bar{b}_1 = -3\bar{a}_1 + \bar{a}_3 - \bar{a}_4,$   
 $\bar{b}_2 = 4\bar{a}_1 - \bar{a}_2 - \bar{a}_3 + 2\bar{a}_4,$   
 $\bar{b}_3 = 4\bar{a}_1 - 2\bar{a}_2 + 2\bar{a}_3 + 3\bar{a}_4,$   
 $\bar{b}_4 = -\bar{a}_1 + 2\bar{a}_3.$
3.  $\bar{x}(-28, 16, -12, -13),$   
 $\bar{a}_1(4, -2, -4, 4),$   
 $\bar{a}_2(2, 1, -3, 2),$   
 $\bar{a}_3(-3, -1, -3, 1),$   
 $\bar{a}_4(-3, 4, -4, -2),$   
 $\bar{b}_1 = 2\bar{a}_1 - 2\bar{a}_2 - 3\bar{a}_3 + 2\bar{a}_4,$   
 $\bar{b}_2 = -3\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + 3\bar{a}_3 - \bar{a}_4,$   
 $\bar{b}_3 = -2\bar{a}_1 - 4\bar{a}_2 + \bar{a}_3 + 3\bar{a}_4,$   
 $\bar{b}_4 = -4\bar{a}_1 - 3\bar{a}_2 - 2\bar{a}_3 + 4\bar{a}_4.$
4.  $\bar{x}(8, -16, -8, 0),$   
 $\bar{a}_1(2, 4, 2, 4),$   
 $\bar{a}_2(-1, 2, 0, 0),$   
 $\bar{a}_3(4, 2, 4, -2),$   
 $\bar{a}_4(0, 1, 3, -3),$   
 $\bar{b}_1 = 2\bar{a}_1 - \bar{a}_3 + 3\bar{a}_4,$   
 $\bar{b}_2 = 2\bar{a}_1 + 3\bar{a}_2 - 3\bar{a}_3 + 2\bar{a}_4,$   
 $\bar{b}_3 = 3\bar{a}_1 + 4\bar{a}_2 - 4\bar{a}_3 + 3\bar{a}_4,$   
 $\bar{b}_4 = -4\bar{a}_2 + 2\bar{a}_3 + \bar{a}_4.$
5.  $\bar{x}(-16, 12, 2, -12),$   
 $\bar{a}_1(4, 2, -1, 2),$   
 $\bar{a}_2(4, 2, 2, 1),$   
 $\bar{a}_3(4, 0, 3, 3),$   
 $\bar{a}_4(-4, -3, 1, -1),$   
 $\bar{b}_1 = -\bar{a}_1 - 2\bar{a}_2 + 2\bar{a}_3 - 2\bar{a}_4,$   
 $\bar{b}_2 = -\bar{a}_2 - 4\bar{a}_4,$   
 $\bar{b}_3 = -2\bar{a}_1 - 2\bar{a}_2 + \bar{a}_3 + 2\bar{a}_4,$   
 $\bar{b}_4 = \bar{a}_1 + 2\bar{a}_3 - 3\bar{a}_4.$
6.  $\bar{x}(1, -3, -6, -12),$   
 $\bar{a}_1(2, 2, -1, 3),$   
 $\bar{a}_2(-2, -2, 4, 4),$   
 $\bar{a}_3(0, 0, 0, -3),$   
 $\bar{a}_4(1, -3, 0, -4),$   
 $\bar{b}_1 = 2\bar{a}_1 + \bar{a}_2 - 2\bar{a}_3 + \bar{a}_4,$   
 $\bar{b}_2 = -2\bar{a}_1 - 4\bar{a}_2 + 2\bar{a}_3 + \bar{a}_4,$   
 $\bar{b}_3 = +2\bar{a}_1 + 3\bar{a}_2 - 3\bar{a}_3 + 2\bar{a}_4,$   
 $\bar{b}_4 = 3\bar{a}_1 + 4\bar{a}_2 - 3\bar{a}_3.$
7.  $\bar{x}(-9, -5, 7, 3),$   
 $\bar{a}_1(3, -4, -2, -3),$   
 $\bar{a}_2(-3, -1, -3, -3),$   
 $\bar{a}_3(3, 0, -4, -3),$   
 $\bar{a}_4(4, -3, -3, 3),$   
 $\bar{b}_1 = -2\bar{a}_1 - \bar{a}_3,$   
 $\bar{b}_2 = -2\bar{a}_1,$   
 $\bar{b}_3 = 3\bar{a}_1 - \bar{a}_2 - 4\bar{a}_3 - 4\bar{a}_4,$   
 $\bar{b}_4 = -\bar{a}_1 + 3\bar{a}_3 + 2\bar{a}_4.$
8.  $\bar{x}(-7, -14, 6, 10),$   
 $\bar{a}_1(1, 3, -3, -4),$   
 $\bar{a}_2(0, -3, 1, 4),$   
 $\bar{a}_3(-3, 1, -2, -2),$   
 $\bar{a}_4(0, 4, -4, 2),$   
 $\bar{b}_1 = 2\bar{a}_2 + 4\bar{a}_3 + \bar{a}_4,$   
 $\bar{b}_2 = \bar{a}_1 - 3\bar{a}_2 - 4\bar{a}_3,$   
 $\bar{b}_3 = 3\bar{a}_1 - 3\bar{a}_2 - 3\bar{a}_3 - 2\bar{a}_4,$   
 $\bar{b}_4 = 4\bar{a}_1 - \bar{a}_2 + \bar{a}_3 - 3\bar{a}_4.$

9.  $\bar{x}(-24, 14, 11, -3)$ ,  
 $\bar{a}_1(4, -3, 1, 1)$ ,  
 $\bar{a}_2(1, -1, 3, -2)$ ,  
 $\bar{a}_3(3, -2, -1, 0)$ ,  
 $\bar{a}_4(-4, 2, 1, 3)$ ,  
 $\bar{b}_1 = -2\bar{a}_1 - \bar{a}_2 - 3\bar{a}_3 - 2\bar{a}_4$ ,  
 $\bar{b}_2 = -\bar{a}_1 - 2\bar{a}_2 + \bar{a}_3 - \bar{a}_4$ ,  
 $\bar{b}_3 = -4\bar{a}_2 + 3\bar{a}_3 - 2\bar{a}_4$ ,  
 $\bar{b}_4 = -3\bar{a}_1 - 2\bar{a}_2 - 2\bar{a}_3 - 2\bar{a}_4$ .
10.  $\bar{x}(18, 15, 2, 22)$ ,  
 $\bar{a}_1(-3, -1, 4, -2)$ ,  
 $\bar{a}_2(3, 0, 2, 2)$ ,  
 $\bar{a}_3(3, -3, -3, -2)$ ,  
 $\bar{a}_4(-3, -4, 3, -4)$ ,  
 $\bar{b}_1 = 4\bar{a}_2 - 4\bar{a}_3 - 3\bar{a}_4$ ,  
 $\bar{b}_2 = 3\bar{a}_1 - 3\bar{a}_2 - \bar{a}_3 - \bar{a}_4$ ,  
 $\bar{b}_3 = -\bar{a}_1 - 2\bar{a}_3 + 3\bar{a}_4$ ,  
 $\bar{b}_4 = 3\bar{a}_1 - 4\bar{a}_2 + 3\bar{a}_3 - 2\bar{a}_4$ .
11.  $\bar{x}(-7, 0, -20, -5)$ ,  
 $\bar{a}_1(-1, 1, -4, -2)$ ,  
 $\bar{a}_2(-2, -2, -2, -3)$ ,  
 $\bar{a}_3(-4, 1, 2, -3)$ ,  
 $\bar{a}_4(1, -4, 3, -3)$ ,  
 $\bar{b}_1 = -\bar{a}_1 + \bar{a}_3 - \bar{a}_4$ ,  
 $\bar{b}_2 = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 - \bar{a}_3 + 2\bar{a}_4$ ,  
 $\bar{b}_3 = -2\bar{a}_1 + 3\bar{a}_2 + 3\bar{a}_3 + \bar{a}_4$ ,  
 $\bar{b}_4 = 2\bar{a}_1 - 3\bar{a}_3 + 3\bar{a}_4$ .
12.  $\bar{x}(2, 24, 7, -2)$ ,  
 $\bar{a}_1(-1, 4, 3, 0)$ ,  
 $\bar{a}_2(4, 4, -2, -3)$ ,  
 $\bar{a}_3(-2, -4, 3, -1)$ ,  
 $\bar{a}_4(1, 2, -3, -2)$ ,  
 $\bar{b}_1 = -3\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3 + 3\bar{a}_4$ ,  
 $\bar{b}_2 = \bar{a}_1 - 2\bar{a}_2 + \bar{a}_3 + 2\bar{a}_4$ ,  
 $\bar{b}_3 = -\bar{a}_1 + 2\bar{a}_2 + 3\bar{a}_3 + 3\bar{a}_4$ ,  
 $\bar{b}_4 = 4\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3 - 3\bar{a}_4$ .
13.  $\bar{x}(8, -17, -3, 2)$ ,  
 $\bar{a}_1(3, -3, 1, 3)$ ,  
 $\bar{a}_2(3, -4, -4, 1)$ ,  
 $\bar{a}_3(-1, 0, 0, 1)$ ,  
 $\bar{a}_4(-4, -2, -1, -2)$ ,  
 $\bar{b}_1 = -2\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3 + \bar{a}_4$ ,  
 $\bar{b}_2 = -3\bar{a}_1 + \bar{a}_2 - 2\bar{a}_3 + 4\bar{a}_4$ ,  
 $\bar{b}_3 = 4\bar{a}_1 - \bar{a}_2 + 2\bar{a}_4$ ,  
 $\bar{b}_4 = -3\bar{a}_1 + \bar{a}_2 - \bar{a}_3 + 2\bar{a}_4$ .
14.  $\bar{x}(-15, -20, -7, 8)$ ,  
 $\bar{a}_1(1, 2, 3, -2)$ ,  
 $\bar{a}_2(-2, -4, 0, -2)$ ,  
 $\bar{a}_3(4, 3, -1, -3)$ ,  
 $\bar{a}_4(-2, 2, 2, 0)$ ,  
 $\bar{b}_1 = -2\bar{a}_1 + \bar{a}_2 - \bar{a}_3$ ,  
 $\bar{b}_2 = 3\bar{a}_1 - 2\bar{a}_2 + 2\bar{a}_3$ ,  
 $\bar{b}_3 = \bar{a}_1 - 3\bar{a}_2 + 3\bar{a}_3 + \bar{a}_4$ ,  
 $\bar{b}_4 = 3\bar{a}_1 + 3\bar{a}_2 - 4\bar{a}_3 - 2\bar{a}_4$ .