

ИДЗ №4. Логика предикатов

По традиции, каждый студент выбирает вариант, соответствующий своему номеру в списке. Домашнее задание нужно сдать не позднее *17 мая*.

Зачёт ставится за все верно выполненные задания.

Желаю Вам не хорошего дня, а замечательного! ☼☺

Варианты

- | | |
|----------------------|------------------------|
| 1. Аленина Мария | 10. Мистреков Вячеслав |
| 2. Боровой Димитрий | 11. Моисеев Владимир |
| 3. Власенко Дарья | 12. Назаров Максим |
| 4. Грибов Егор | 13. Орищенко Михаил |
| 5. Им Владислав | 14. Петров Даниил |
| 6. Капитонов Илья | 15. Савельев Владимир |
| 7. Косенко Екатерина | 16. Тарасенко Тифомей |
| 8. Кушманов Данил | 17. Троц Олег |
| 9. Макевкин Савелий | 18. Федоров Денис |

Вариант 1

1. Постройте подсистему алгебраической системы \mathfrak{A} , порождённую множеством X :

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Q}; \cdot^{(2)}, :^{(2)} \rangle,$$

$$X = \left\{ -\frac{1}{2}, 2 \right\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ , определите её свободные переменные:

$$\Phi \Leftrightarrow \exists z(x \leq z + 1 \vee \exists y(y + 1 = z)) \rightarrow \exists x(\neg(x + y = 1) \rightarrow \forall y(x \leq y)).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathbb{Q}; +^{(2)}, \cdot^{(2)} \rangle \models \Phi(a) \iff a = \frac{1}{3}.$$

4. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathcal{P}(A); \cap^{(2)} \rangle \models \Phi(a) \iff a \neq \emptyset,$$

где $\mathcal{P}(A)$ — булеан множества A .

Вариант 2

1. Постройте подсистему алгебраической системы \mathfrak{A} , порождённую множеством X :

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}; +^{(2)}, 6^{(0)} \rangle,$$

$$X = \{16, 62\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ , определите её свободные переменные:

$$\Phi \Leftrightarrow \exists x(\exists y(y = x + 1) \vee ((x \cdot 2 = y) \rightarrow \exists y(x = y + z))).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathbb{Z}; +^{(2)}, \cdot^{(2)} \rangle \models \Phi(a) \iff a = -3.$$

4. Напишите формулу Φ такую, что

$$\langle \mathbb{Z}; +^{(2)} \rangle \models \Phi,$$

$$\langle \mathbb{N}; +^{(2)} \rangle \not\models \Phi.$$

Вариант 3

1. Постройте подсистему алгебраической системы \mathfrak{A} , порождённую множеством X :

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Q}; \cdot^{(2)} \rangle,$$

$$X = \left\{ \frac{3}{4}, -\frac{64}{27} \right\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ , определите её свободные переменные:

$$\Phi \Leftrightarrow (\exists x (x < y + z) \wedge (z \cdot x = u)) \rightarrow \forall z \exists y (u = y + z).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x, y, z)$ такую, что

$$\langle \mathbb{N}; \cdot^{(2)}, >^{(2)} \rangle \models \Phi(a, b, c) \iff b \leq a \leq c.$$

4. Напишите формулу Φ такую, что

$$\langle \mathbb{R}; \leq^{(2)} \rangle \models \Phi,$$

$$\langle \mathbb{Z}; \leq^{(2)} \rangle \not\models \Phi.$$

Вариант 4

1. Постройте подсистему алгебраической системы \mathfrak{A} , порождённую множеством X :

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{R} \setminus \{0\}; :^{(2)} \rangle,$$

$$X = \left\{ \frac{3}{5}, -\frac{9}{25} \right\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ , определите её свободные переменные:

$$\Phi \Leftrightarrow \exists y (x < y + z) \vee \forall u (y \cdot 2 = u) \rightarrow \exists x \forall u (u = x + z).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x, y, z)$ такую, что

$$\langle \mathcal{P}(A); \cap^{(2)}, \cup^{(2)} \rangle \models \Phi(a, b, c) \iff b \subseteq c \setminus a,$$

где $\mathcal{P}(A)$ — булеан множества A .

4. Напишите формулу Φ такую, что

$$\langle \omega; +^{(2)} \rangle \models \Phi,$$

$$\langle \mathbb{Z}; +^{(2)} \rangle \not\models \Phi.$$

Вариант 5

1. Постройте подсистему алгебраической системы \mathfrak{A} , порождённую множеством X :

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}; +^{(2)}, -^{(2)} \rangle,$$

$$X = \{146, -16, 22\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ , определите её свободные переменные:

$$\Phi \Leftrightarrow ((x < y + z) \wedge \neg \exists x (\exists y (y \cdot 2 = u) \rightarrow \exists z (u = x + z) \vee x = 2)).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x, y)$ такую, что

$$\langle \mathbb{Z}; +^{(2)}, \cdot^{(2)} \rangle \models \Phi(a, b) \iff (3a - b):2.$$

4. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathcal{P}(A); \cup^{(2)} \rangle \models \Phi(a) \iff a = \emptyset,$$

где $\mathcal{P}(A)$ — булеан множества A .

Вариант 6

1. Постройте подсистему алгебраической системы \mathfrak{A} , порождённую множеством X :

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{C}; \cdot^{(2)} \rangle,$$

$$X = \{1 - \sqrt{3}i\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ , определите её свободные переменные:

$$\Phi \Leftrightarrow \exists x (\exists y (x + z > y) \wedge (z \cdot x = y)) \rightarrow \exists v (u = x + v).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x, y)$ такую, что

$$\langle \mathcal{P}(A); \cap^{(2)} \rangle \models \Phi(a, b) \iff a \subset b,$$

где $\mathcal{P}(A)$ — булеан множества A .

4. Подберите нужную сигнатуру и запишите аксиому Лобачевского о параллельных прямых.

Вариант 7

1. Постройте подсистему алгебраической системы \mathfrak{A} , порождённую множеством X :

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{R} \setminus \{0\}; \cdot^{(2)} \rangle,$$

$$X = \left\{ \frac{4}{3}, -\frac{9}{16} \right\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ , определите её свободные переменные:

$$\Phi \Leftrightarrow ((z + x < y) \wedge \exists x (\forall y (y \cdot x = u) \rightarrow \exists z (u + z = x) \wedge y = 2)).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathbb{R}; +^{(2)}, \cdot^{(2)} \rangle \models \Phi(a) \iff a = -\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

4. Напишите формулу $\Phi(x, y, z)$ такую, что

$$\langle \mathcal{P}(A); \cap^{(2)}, \cup^{(2)} \rangle \models \Phi(a, b, c) \iff a \setminus b \subseteq c,$$

где $\mathcal{P}(A)$ — булеан множества A .

Вариант 8

1. Постройте подсистему алгебраической системы \mathfrak{A} , порождённую множеством X :

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}; -^{(2)} \rangle,$$

$$X = \{16, -36\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ , определите её свободные переменные:

$$\Phi \Leftrightarrow \forall x (x = y - 2) \wedge \forall x (y \cdot x = u) \rightarrow \exists x \forall y (y - z = x).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathbb{C}; +^{(2)}, \cdot^{(2)} \rangle \models \Phi(a) \iff a = \pm 2i.$$

4. Напишите формулу $\Phi(x, y)$ такую, что

$$\langle \mathcal{P}(A); \cup^{(2)} \rangle \models \Phi(a, b) \iff b \subseteq a,$$

где $\mathcal{P}(A)$ — булеан множества A .

Вариант 9

1. Постройте подсистему алгебраической системы \mathfrak{A} , порождённую множеством X :

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Q}; \cdot^{(2)} \rangle,$$

$$X = \left\{ \frac{5}{9}, -\frac{27}{25} \right\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ , определите её свободные переменные:

$$\Phi \Leftrightarrow \forall x ((x + z < y) \wedge (\forall y^{\neg} (y \cdot 2 = u) \rightarrow \exists z \forall u (u + x = z + y))).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x, y, z)$ такую, что

$$\langle \mathbb{N}; \cdot^{(2)}, \geq^{(2)} \rangle \models \Phi(a, b, c) \iff c < a \leq b.$$

4. Напишите формулу $\Phi(x, y, z)$ такую, что

$$\langle \mathcal{P}(A); \cap^{(2)} \rangle \models \Phi(a, b, c) \iff a \subset c \cup b,$$

где $\mathcal{P}(A)$ — булеан множества A .

Вариант 10

1. Постройте подсистему алгебраической системы \mathfrak{A} , порождённую множеством X :

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{C} \setminus \{0\}; :^{(2)} \rangle,$$

$$X = \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ , определите её свободные переменные:

$$\Phi \Leftrightarrow \forall x (x < y + z) \vee \forall u (y \cdot 2 = u) \rightarrow \forall x \forall u (z = x + u).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathbb{Q}; +^{(2)}, \cdot^{(2)} \rangle \models \Phi(a) \iff a = -\frac{1}{4}.$$

4. Напишите формулу $\Phi(x, y, z)$ такую, что

$$\langle \mathcal{P}(A); \cup^{(2)} \rangle \models \Phi(a, b, c) \iff a \subset b \cap c,$$

где $\mathcal{P}(A)$ — булеан множества A .

Вариант 11

1. Постройте подсистему алгебраической системы \mathfrak{A} , порождённую множеством X :

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}; \cdot^{(2)} \rangle,$$

$$X = \{-8, 64\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ , определите её свободные переменные:

$$\Phi \Leftrightarrow \forall x \forall z \neg \exists y (x < y + z) \wedge ((z \cdot 2 = u) \rightarrow \forall u (z = x + u)).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathbb{C}; +^{(2)}, \cdot^{(2)} \rangle \models \Phi(a) \iff a = \pm i.$$

4. Подберите нужную сигнатуру и запишите пятый постулат Евклида.

Вариант 12

1. Постройте подсистему алгебраической системы \mathfrak{A} , порождённую множеством X :

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Q}; \cdot^{(2)}, :^{(2)} \rangle,$$

$$X = \left\{ 1, \frac{3}{2} \right\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ , определите её свободные переменные:

$$\Phi \Leftrightarrow (\forall x (z > x) \wedge (x \cdot z = y)) \rightarrow \forall y \forall z (z = y + u).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathbb{Q}; +^{(2)}, \cdot^{(2)} \rangle \models \Phi(a) \iff a = \frac{1}{3}.$$

4. Пусть $\Sigma = \{P^{(2)}\}$. Напишите формулу, описывающую тот факт, что P в любой интерпретации является отношением эквивалентности и что существует класс по этому отношению, содержащий более двух элементов.

Вариант 13

1. Постройте подсистему алгебраической системы \mathfrak{A} , порождённую множеством X :

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{C} \setminus \{0\}; \cdot^{(2)} \rangle,$$

$$X = \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ , определите её свободные переменные:

$$\Phi \Leftrightarrow \forall x (x = y \cdot z) \rightarrow (\neg \exists y (y \cdot u = x) \rightarrow \forall z \exists v (v - z = x)).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x, y, z)$ такую, что

$$\langle \mathcal{P}(A); \cup^{(2)} \rangle \models \Phi(a, b, c) \iff b \cap c \subset a,$$

где $\mathcal{P}(A)$ — булеан множества A .

4. Напишите формулу Φ такую, что

$$\langle \mathbb{C}; \cdot^{(2)} \rangle \models \Phi,$$

$$\langle \mathbb{R}; \cdot^{(2)} \rangle \not\models \Phi.$$

Вариант 14

1. Постройте подсистему алгебраической системы \mathfrak{A} , порождённую множеством X :

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}; +^{(2)}, -^{(2)} \rangle,$$

$$X = \{-115, 40, 235\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ , определите её свободные переменные:

$$\Phi \Leftrightarrow \forall x \exists z \forall y (x < y + z) \vee ((z \cdot 2 = u) \rightarrow \forall u (u = x + z)).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x, y)$ такую, что

$$\langle \mathbb{Z}; +^{(2)}, \cdot^{(2)} \rangle \models \Phi(a, b) \iff (3a - 2b) : 5.$$

4. Напишите формулу Φ такую, что

$$\langle \mathbb{Z}; \cdot^{(2)} \rangle \models \Phi,$$

$$\langle \mathbb{N}; \cdot^{(2)} \rangle \not\models \Phi.$$

Вариант 15

1. Постройте подсистему алгебраической системы \mathfrak{A} , порождённую множеством X :

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}; -^{(2)} \rangle,$$

$$X = \{14, -28\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ , определите её свободные переменные:

$$\Phi \Leftrightarrow \forall x (\forall y (x < y + z) \wedge (z \cdot x = y)) \rightarrow \forall z (u = x + z).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathbb{R}; +^{(2)}, \cdot^{(2)} \rangle \models \Phi(a) \iff a = \sqrt{3}.$$

4. Напишите формулу Φ такую, что

$$\langle \mathbb{Z}; \leq^{(2)} \rangle \models \Phi,$$

$$\langle \mathbb{N}; \leq^{(2)} \rangle \not\models \Phi.$$

Вариант 16

1. Постройте подсистему алгебраической системы \mathfrak{A} , порождённую множеством X :

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}; +^{(2)}, 4^{(0)} \rangle,$$

$$X = \{32, 56\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ , определите её свободные переменные:

$$\Phi \Leftrightarrow \forall x ((x < y + z) \wedge (\forall y^{\neg} (y \cdot 2 = u) \rightarrow \exists z \forall u (u - z = x + y))).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathbb{Z}; +^{(2)}, \cdot^{(2)} \rangle \models \Phi(a) \iff a = -3.$$

4. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathcal{P}(A); \cap^{(2)} \rangle \models \Phi(a) \iff a \neq A,$$

где $\mathcal{P}(A)$ — булеан множества A .

Вариант 17

1. Постройте подсистему алгебраической системы \mathfrak{A} , порождённую множеством X :

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{C}; +^{(2)} \rangle,$$

$$X = \mathbb{N} \cup \{-i\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ , определите её свободные переменные:

$$\Phi \Leftrightarrow (\forall y (x < y + z) \wedge (x \cdot u = z)) \rightarrow \forall u \forall y (u = y + z).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathcal{P}(A); \cup^{(2)} \rangle \models \Phi(a) \iff |a| = |A| - 1,$$

где $\mathcal{P}(A)$ — булеан непустого множества A .

4. Пусть $\Sigma = \{P^{(2)}\}$. Напишите формулу, описывающую тот факт, что P в любой интерпретации является отношением порядка. Напишите определение наименьшего элемента.

Вариант 18

1. Постройте подсистему алгебраической системы \mathfrak{A} , порождённую множеством X :

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Q}; \cdot^{(2)} \rangle,$$

$$X = \left\{ 5, -\frac{3}{5} \right\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ , определите её свободные переменные:

$$\Phi \Leftrightarrow \exists y (\forall x (y \leq x \vee x = 1) \wedge (x : y)) \rightarrow \forall z (x \leq z).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x, y, z)$ такую, что

$$\langle \mathcal{P}(A); \cap^{(2)} \rangle \models \Phi(a, b, c) \iff c \cup b \subseteq a,$$

где $\mathcal{P}(A)$ — булеан множества A .

4. Напишите формулу Φ такую, что

$$\langle \mathbb{Q}; \cdot^{(2)} \rangle \models \Phi,$$

$$\langle \mathbb{R}; \cdot^{(2)} \rangle \not\models \Phi.$$