IV семестр, группа Б9123-09.03.04

ИДЗ №4. Логика предикатов

По традиции, каждый студент выбирает вариант, соответствующий своему номеру в списке. Домашнее задание нужно сдать не позднее *17 мая*.

Зачёт ставится за все верно выполненные задания.

Желаю Вам не хорошего дня, а замечательного! ☼☺

Варианты

1. Абрамашвили Леван
2. Акимов Савва
3. Бижанова Алина
4. Бойчук Егор
5. Васильев Леонид
6. Власов Алексей
7. Власова Валерия
8. Войтик Никита
9. Волошинский Ростислав
10. Гилев Антон
11. Гнатенко Андрей
12. Дмитриенко Виктор
13. Дмитриенко Макар
14. Долгорук Даниил
15. Думич Кира
16. Егоров Артем
17. Ельчанинов Андрей
18. Жизнев Вадим
19. Жуков Никита
20. Захаркин Павел
21. Земсков Иван
22. Иванов Леонид
23. Иванова Анастасия
24. Ильин Кирилл
25. Ильин Эдуард
26. Исаев Никита
27. Казаков Артём
28. Калитин Никита
29. Калюжко Алексей
30. Ким Денис
31. Ковалёв Игнат
32. Кожевников Роман
33. Козлова Кристина
34. Колван Лев
35. Комаров Даниил
36. Кон Владислав
37. Коряковцев Максим
38. Кочегуров Данил

39. Кошевой Павел
40. Кузина Екатерина
41. Кулеш Алексей
42. Кучерчук Фёдор
43. Лебедев Арсений
44. Макарцев Станислав
45. Манжелей Никита
46. Найдовская Любовь
47. Николаев Чагыл
48. Николенко Артем
49. Нимаосоров Тамир
50. Онищенко Александр
51. Павлова Диана
52. Панов Илья
53. Панухник Арсений
54. Папчук Елизавета
55. Подпругин Никита
56. Пожидаев Дмитрий
57. Полулях Андрей
58. Портнова Лидия
59. Привалов Максим
60. Проскуренко Тимофей
61. Рякин Ярослав
62. Саватеев Денис
63. Самохин Данил
64. Серёдкина Виктория
65. Слесарев Дмитрий
66. Стафиевская София
67. Сяськин Никита
68. Тарабукин Александр
69. Твердохлебов Данил
70. Ткачев Андрей
71. Толочек Светлана
72. Троянов Михаил
73. Угринович Сергей
74. Умрилов Егор
75. Фарухшин Ринат
76. Федосейкин Никита
77. Фролов Александр
78. Цветков Алексей
79. Цыбенова Сарюна
80. Чернышев Вячеслав
81. Чуев Александр
82. Чусов Иван
83. Шахматов Александр
84. Шехоркин Вадим
85. Шурыгин Денис
86. Щуров Денис
87. Юрьев Артём

Вариант 1

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{C}; +^{(2)} \rangle,$$

$$X = \mathbb{Z} \cup \{i\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \exists y \big(\forall x\, (y \leqslant x \vee x = 1) \wedge (x \,\vdots\, y)\big) \to \exists z \,\big(x \leqslant z\big).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathcal{P}(A); \cup^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a) \Longleftrightarrow a = A,$$

где $\mathcal{P}(A)$ — булеан множества A.

4. Напишите формулу Φ такую, что

$$\langle \mathbb{N}; +^{(2)} \rangle \vDash \Phi,$$

$$\langle \mathbb{Z}; +^{(2)} \rangle \nvDash \Phi.$$

Вариант 2

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}; +^{(2)}, -^{(2)} \rangle,$$

$$X = \{-2,\ 7\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \exists x \,\big(\exists y\, (y = x + 1) \wedge \big((x \cdot 2 = y) \to \forall y\, (x = y + z)\big)\big).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathcal{P}(A); \cap^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a) \Longleftrightarrow a = \varnothing,$$

где $\mathcal{P}(A)$ — булеан множества A.

4. Напишите формулу Φ такую, что

$$\langle \mathbb{Z}; \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi,$$

$$\langle \mathbb{Q}; \cdot^{(2)} \rangle \nvDash \Phi.$$

Вариант 3

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}; +^{(2)}, -^{(2)} \rangle,$$

$$X = \{-132,\ 39,\ 252\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \forall x \big(\exists y\, (x < y + z) \wedge (z \cdot x = y)\big) \to \forall u\, \big(u = x + z\big).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x, y)$ такую, что

$$\langle \mathbb{Z}; +^{(2)}, \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a, b) \iff (2a - 3b) \vdots 4.$$

4. Напишите формулу Φ такую, что

$$\langle \mathbb{N}; \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi,$$

$$\langle \mathbb{Z}; \cdot^{(2)} \rangle \nvDash \Phi.$$

Вариант 4

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Q}; \cdot^{(2)} \rangle,$$

$$X = \left\{3,\ \frac{1}{4}\right\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \exists z\, \big(x \leqslant z + 1 \vee \forall y\, (y + 1 = z)\big) \to \exists x\, \big(\neg(x + y = 1) \to \forall y\, (x \leqslant y)\big).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x, y, z)$ такую, что

$$\langle \mathcal{P}(A); \cap^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a, b, c) \iff a \cup b \subseteq c,$$

где $\mathcal{P}(A)$ — булеан множества A.

4. Напишите формулу Φ такую, что

$$\langle \mathbb{R}; \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi,$$

$$\langle \mathbb{Q}; \cdot^{(2)} \rangle \nvDash \Phi.$$

Вариант 5

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}; +^{(2)}, 6^{(0)} \rangle,$$

$$X = \{18,\ 60\}\,.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \forall x\,\big((x < y + z) \wedge (z \cdot x = u)\big) \to \forall u \exists y\,\big(u = y + z\big).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathbb{Z}; +^{(2)}, \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a) \iff a = -2.$$

4. Пусть $\Sigma = \{P^{(2)}\}$. Напишите формулу, описывающую тот факт, что P в любой интерпретации является отношением нестрогого порядка. Напишите определение максимального элемента.

Вариант 6

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Q}; \cdot^{(2)} \rangle,$$

$$X = \left\{\frac{3}{5},\ -\frac{125}{27}\right\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \exists y\,(x < y + z) \wedge \forall u\,(y \cdot 2 = u) \to \forall x \forall u\,(u = x + z)\,.$$

3. Напишите формулу $\Phi(x, y, z)$ такую, что

$$\langle \mathbb{N}; \cdot^{(2)}, >^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a, b, c) \iff a \leqslant c \leqslant b.$$

4. Напишите формулу Φ такую, что

$$\langle \mathbb{Z}; \leqslant^{(2)} \rangle \vDash \Phi,$$

$$\langle \mathbb{R}; \leqslant^{(2)} \rangle \nvDash \Phi.$$

Вариант 7

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{R} \setminus \{0\};\ :^{(2)} \rangle,$$

$$X = \left\{ \frac{2}{7},\ -\frac{4}{49} \right\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \big(x < y + z\big) \wedge \forall x \left(\exists y \left(y \cdot 2 = u \right) \to \exists z \left(u = x + z \right) \vee \left(x = 2 \right) \right).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x, y, z)$ такую, что

$$\langle \mathcal{P}(A); \cap^{(2)}, \cup^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a, b, c) \Longleftrightarrow c \subseteq a \setminus b,$$

где $\mathcal{P}(A)$ — булеан множества A.

4. Напишите формулу Φ такую, что

$$\langle \mathbb{Z}; +^{(2)} \rangle \vDash \Phi,$$

$$\langle \omega; +^{(2)} \rangle \nvDash \Phi.$$

Вариант 8

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{C}; \cdot^{(2)} \rangle,$$

$$X = \left\{ 1 + \sqrt{3}i \right\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \forall x \left(x = y - 2 \right) \vee \exists x \left(y \cdot x = u \right) \to \exists x \forall y \left(y - z = x \right).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x, y)$ такую, что

$$\langle \mathcal{P}(A); \cap^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a, b) \Longleftrightarrow a \subseteq b,$$

где $\mathcal{P}(A)$ — булеан множества A.

4. Пусть $\Sigma = \{P^{(2)}\}$. Напишите формулу, описывающую тот факт, что P в любой интерпретации является отношением эквивалентности.

Вариант 9

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}; +^{(2)}, -^{(2)} \rangle,$$

$$X = \{128,\ -28,\ 34\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \exists x \big(\exists y\,(x + z > y) \wedge (z \cdot x = y)\big) \to \forall u \big(u = x + z\big).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x, y)$ такую, что

$$\langle \mathbb{Z}; +^{(2)}, \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a, b) \iff (4a - 2b) \vdots 3.$$

4. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathcal{P}(A); \cup^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a) \iff a = \varnothing,$$

где $\mathcal{P}(A)$ — булеан множества A.

Вариант 10

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Q}; \cdot^{(2)}, :^{(2)} \rangle,$$

$$X = \left\{2,\ \frac{1}{2}\right\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \exists x \big(x = y \cdot z\big) \to \big(\exists y\,(y \cdot u = x) \to \forall z \exists v\,(v - z = x)\big).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathbb{Q}; +^{(2)}, \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a) \iff a = \frac{1}{2}.$$

4. Подберите нужную сигнатуру и запишите аксиому Лобачевского о параллельных прямых.

Вариант 11

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}; \cdot^{(2)} \rangle,$$

$$X = \{-3,\ 9\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons (\forall x\,(z > x) \vee (x \cdot z = y)) \to \exists y \forall z\,(z = y + u).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathbb{C}; +^{(2)}, \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a) \Longleftrightarrow a = \pm i.$$

4. Подберите нужную сигнатуру и запишите следующую аксиому стереометрии: «Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости».

Вариант 12

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}; -^{(2)} \rangle,$$

$$X = \{22,\ -36\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \forall x\,((x < y + z) \wedge (\exists y\,(y \cdot 2 = u) \to \exists z \forall u\,(u - z = x + y))).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathbb{R}; +^{(2)}, \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a) \Longleftrightarrow a = \sqrt{2}.$$

4. Напишите формулу Φ такую, что

$$\langle \mathbb{N}; \leqslant^{(2)} \rangle \vDash \Phi,$$

$$\langle \mathbb{Z}; \leqslant^{(2)} \rangle \nvDash \Phi.$$

Вариант 13

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{C} \setminus \{0\};\ :^{(2)} \rangle,$$

$$X = \left\{ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \exists x \forall z \exists y \, (x < y + z) \wedge ((z \cdot 2 = u) \to \forall u \, (z = x + u)) \, .$$

3. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathbb{Q}; +^{(2)}, \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a) \iff a = -\frac{1}{2}.$$

4. Напишите формулу $\Phi(x, y, z)$ такую, что

$$\langle \mathcal{P}(A); \cup^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a, b, c) \iff c \subseteq a \cap b,$$

где $\mathcal{P}(A)$ — булеан множества A.

Вариант 14

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{R} \setminus \{0\};\ :^{(2)} \rangle,$$

$$X = \left\{ \frac{4}{5},\ -\frac{25}{16} \right\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons ((z + x < y) \wedge \exists x \, (\forall y \, (y \cdot x = u) \to \exists z \, (u + z = x) \vee y = 2)) \, .$$

3. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathbb{C}; +^{(2)}, \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a) \iff a = \pm i.$$

4. Напишите формулу $\Phi(x, y, z)$ такую, что

$$\langle \mathcal{P}(A); \cap^{(2)}, \cup^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a, b, c) \iff a \setminus b \subseteq c,$$

где $\mathcal{P}(A)$ — булеан множества A.

Вариант 15

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{C} \setminus \{0\};\ :^{(2)} \rangle,$$

$$X = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i \right\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \forall x \exists z \exists y \, (x < y + z) \wedge ((z \cdot 2 = u) \to \forall u \, (u = x + z)) \, .$$

3. Напишите формулу $\Phi(x, y, z)$ такую, что

$$\langle \mathcal{P}(A); \cup^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a, b, c) \iff a \cap b \subseteq c,$$

где $\mathcal{P}(A)$ — булеан множества A.

4. Напишите формулу Φ такую, что

$$\langle \mathbb{R}; \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi,$$

$$\langle \mathbb{C}; \cdot^{(2)} \rangle \nvDash \Phi.$$

Вариант 16

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{C} \setminus \{0\};\ :^{(2)} \rangle,$$

$$X = \left\{ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \exists x \forall z \exists y \, (x < y + z) \wedge ((z \cdot 2 = u) \to \forall u \, (z = x + u)) \, .$$

3. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathbb{Q}; +^{(2)}, \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a) \iff a = -\frac{1}{2}.$$

4. Напишите формулу $\Phi(x, y, z)$ такую, что

$$\langle \mathcal{P}(A); \cup^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a, b, c) \iff c \subseteq a \cap b,$$

где $\mathcal{P}(A)$ — булеан множества A.

Вариант 17

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}; +^{(2)}, 4^{(0)} \rangle,$$

$$X = \{48,\ 64\}\,.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons (\exists y\,(x < y + z) \wedge (x \cdot u = z)) \to \forall u \forall y\,(u = y + z)\,.$$

3. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathbb{Z}; +^{(2)}, \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a) \iff a = 3.$$

4. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathcal{P}(A); \cap^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a) \iff a = A,$$

где $\mathcal{P}(A)$ — булеан множества A.

Вариант 18

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}; -^{(2)} \rangle,$$

$$X = \{15,\ -39\}\,.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \exists x\,((x + z < y) \wedge (\forall y\,(y \cdot 2 = u) \to \exists z \forall u\,(u + x = z + y)))\,.$$

3. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathbb{R}; +^{(2)}, \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a) \iff a = -\sqrt{2}.$$

4. Напишите формулу $\Phi(x, y)$ такую, что

$$\langle \mathcal{P}(A); \cup^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a, b) \iff a \subseteq b,$$

где $\mathcal{P}(A)$ — булеан множества A.

Вариант 19

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Q}; \cdot^{(2)} \rangle,$$

$$X = \left\{ \frac{4}{3},\ -\frac{9}{8} \right\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \exists x \,(x < y + z) \land \exists u \neg\, (y \cdot 2 = u) \to \forall x \forall u \,(z = x + u)\,.$$

3. Напишите формулу $\Phi(x, y, z)$ такую, что

$$\langle \mathbb{N}; \cdot^{(2)}, \geqslant^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a, b, c) \Longleftrightarrow c < b < a.$$

4. Напишите формулу $\Phi(x, y, z)$ такую, что

$$\langle \mathcal{P}(A); \cap^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a, b, c) \Longleftrightarrow b \subseteq c \cup a,$$

где $\mathcal{P}(A)$ — булеан множества A.

Вариант 20

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}; \cdot^{(2)} \rangle,$$

$$X = \{-4,\ 16\}\,.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \exists x \,(x < y + z) \land \exists u \,(y \cdot 2 = u) \to \forall x \neg \forall u \,(z = x + u)\,.$$

3. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathbb{C}; +^{(2)}, \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a) \Longleftrightarrow a = \pm i.$$

4. Подберите нужную сигнатуру и запишите следующую аксиому стереометрии: «Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей».

Вариант 21

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}; +^{(2)}, -^{(2)} \rangle,$$

$$X = \{-124,\ 56,\ 216\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons (\exists x\, (z > x) \wedge (x \cdot z = y)) \to \exists y \forall z\, (z = y + u).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x, y)$ такую, что

$$\langle \mathbb{Z}; +^{(2)}, \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a, b) \Longleftrightarrow (2a - 3b) \vdots 4.$$

4. Напишите формулу Φ такую, что

$$\langle \mathbb{Z}; \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi,$$

$$\langle \mathbb{N}; \cdot^{(2)} \rangle \nvDash \Phi.$$

Вариант 22

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{C}; +^{(2)} \rangle,$$

$$X = \mathbb{Q} \cup \{2i\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \exists x\, (\exists y\, (x < y + z) \vee (z \cdot x = y)) \to \forall u\, (u = x + z).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathcal{P}(A); \cup^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a) \Longleftrightarrow a = A,$$

где $\mathcal{P}(A)$ — булеан множества A.

4. Пусть $\Sigma = \{P^{(2)}\}$. Напишите формулу, описывающую тот факт, что P в любой интерпретации является отношением порядка. Напишите определение наибольшего элемента.

Вариант 23

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}; -^{(2)} \rangle,$$

$$X = \{-21,\ -36\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \exists y (\neg \exists x\, (y \leqslant x \vee x = 1) \wedge (x \,\vdots\, y)) \to \exists z\, (x \leqslant z)\,.$$

3. Напишите формулу $\Phi(x, y, z)$ такую, что

$$\langle \mathcal{P}(A); \cap^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a, b, c) \Longleftrightarrow b \cup c \subseteq a,$$

где $\mathcal{P}(A)$ — булеан множества A.

4. Напишите формулу Φ такую, что

$$\langle \mathbb{Z}; \leqslant^{(2)} \rangle \vDash \Phi,$$

$$\langle \mathbb{N}; \leqslant^{(2)} \rangle \nvDash \Phi.$$

Вариант 24

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Q}; \cdot^{(2)} \rangle,$$

$$X = \left\{ \frac{1}{3},\ 4 \right\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \exists x\, ((x < y + z) \vee (\exists y\, (y \cdot 2 = u) \to \exists z \forall u\, (u - z = x + y)))\,.$$

3. Пусть $\Sigma = \{P^{(2)}\}$. Напишите формулу, описывающую тот факт, что P в любой интерпретации является отношением эквивалентности и что существует одноэлементный класс по этому отношению.

4. Напишите формулу Φ такую, что

$$\langle \mathbb{Q}; \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi,$$

$$\langle \mathbb{R}; \cdot^{(2)} \rangle \nvDash \Phi.$$

Вариант 25

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}; +^{(2)}, -^{(2)} \rangle,$$

$$X = \{-3,\ 8\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \exists x\,(x = y \cdot z) \to (\neg \exists y\,(y \cdot u = x) \to \exists z \exists v\,(v - z = x)).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathbb{R}; +^{(2)}, \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a) \Longleftrightarrow a = \sqrt{3}.$$

4. Напишите формулу Φ такую, что

$$\langle \mathbb{Q}; \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi,$$

$$\langle \mathbb{Z}; \cdot^{(2)} \rangle \nvDash \Phi.$$

Вариант 26

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Q}; \cdot^{(2)}, :^{(2)} \rangle,$$

$$X = \left\{-\frac{1}{2},\ 2\right\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \exists z(x \leqslant z + 1 \vee \exists y(y + 1 = z)) \to \exists x(\neg(x + y = 1) \to \forall y(x \leqslant y)).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathbb{Q}; +^{(2)}, \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a) \Longleftrightarrow a = \frac{1}{3}.$$

4. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathcal{P}(A); \cap^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a) \Longleftrightarrow a \neq \varnothing,$$

где $\mathcal{P}(A)$ — булеан множества A.

Вариант 27

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}; +^{(2)}, 6^{(0)} \rangle,$$

$$X = \{16,\ 62\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \exists x\, (\exists y\, (y = x + 1) \vee ((x \cdot 2 = y) \to \exists y\, (x = y + z))).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathbb{Z}; +^{(2)}, \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a) \iff a = -3.$$

4. Напишите формулу Φ такую, что

$$\langle \mathbb{Z}; +^{(2)} \rangle \vDash \Phi,$$

$$\langle \mathbb{N}; +^{(2)} \rangle \nvDash \Phi.$$

Вариант 28

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Q}; \cdot^{(2)} \rangle,$$

$$X = \left\{ \frac{3}{4},\ -\frac{64}{27} \right\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons (\exists x\, (x < y + z) \wedge (z \cdot x = u)) \to \forall z \exists y\, (u = y + z).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x, y, z)$ такую, что

$$\langle \mathbb{N}; \cdot^{(2)}, >^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a, b, c) \iff b \leqslant a \leqslant c.$$

4. Напишите формулу Φ такую, что

$$\langle \mathbb{R}; \leqslant^{(2)} \rangle \vDash \Phi,$$

$$\langle \mathbb{Z}; \leqslant^{(2)} \rangle \nvDash \Phi.$$

Вариант 29

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{R} \setminus \{0\};\ :^{(2)} \rangle,$$

$$X = \left\{ \frac{3}{5},\ -\frac{9}{25} \right\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \exists y\,(x < y + z) \vee \forall u\,(y \cdot 2 = u) \to \exists x \forall u\,(u = x + z)\,.$$

3. Напишите формулу $\Phi(x, y, z)$ такую, что

$$\langle \mathcal{P}(A); \cap^{(2)}, \cup^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a, b, c) \Longleftrightarrow b \subseteq c \setminus a,$$

где $\mathcal{P}(A)$ — булеан множества A.

4. Напишите формулу Φ такую, что

$$\langle \omega; +^{(2)} \rangle \vDash \Phi,$$

$$\langle \mathbb{Z}; +^{(2)} \rangle \nvDash \Phi.$$

Вариант 30

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}; +^{(2)}, -^{(2)} \rangle,$$

$$X = \{146,\ -16,\ 22\}\,.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons ((x < y + z) \wedge \neg \exists x\,(\exists y\,(y \cdot 2 = u) \to \exists z\,(u = x + z) \vee x = 2))\,.$$

3. Напишите формулу $\Phi(x, y)$ такую, что

$$\langle \mathbb{Z}; +^{(2)}, \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a, b) \Longleftrightarrow (3a - b) \vdots 2.$$

4. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathcal{P}(A); \cup^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a) \Longleftrightarrow a = \varnothing,$$

где $\mathcal{P}(A)$ — булеан множества A.

Вариант 31

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{C}; \cdot^{(2)} \rangle,$$

$$X = \left\{ 1 - \sqrt{3} i \right\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \exists x \left(\exists y \left(x + z > y \right) \wedge \left(z \cdot x = y \right) \right) \to \exists v \left(u = x + v \right).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x, y)$ такую, что

$$\langle \mathcal{P}(A); \cap^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a, b) \Longleftrightarrow a \subset b,$$

где $\mathcal{P}(A)$ — булеан множества A.

4. Подберите нужную сигнатуру и запишите аксиому Лобачевского о параллельных прямых.

Вариант 32

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{R} \setminus \{0\};\ :^{(2)} \rangle,$$

$$X = \left\{ \frac{4}{3},\ -\frac{9}{16} \right\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \left(\left(z + x < y \right) \wedge \exists x \left(\forall y \left(y \cdot x = u \right) \to \exists z \left(u + z = x \right) \wedge y = 2 \right) \right).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathbb{R}; +^{(2)}, \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a) \Longleftrightarrow a = -\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

4. Напишите формулу $\Phi(x, y, z)$ такую, что

$$\langle \mathcal{P}(A); \cap^{(2)}, \cup^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a, b, c) \Longleftrightarrow a \setminus b \subseteq c,$$

где $\mathcal{P}(A)$ — булеан множества A.

Вариант 33

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}; -^{(2)} \rangle,$$

$$X = \{16,\ -36\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \forall x\,(x = y - 2) \wedge \forall x\,(y \cdot x = u) \to \exists x \forall y\,(y - z = x).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathbb{C}; +^{(2)}, \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a) \Longleftrightarrow a = \pm 2i.$$

4. Напишите формулу $\Phi(x, y)$ такую, что

$$\langle \mathcal{P}(A); \cup^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a, b) \Longleftrightarrow b \subseteq a,$$

где $\mathcal{P}(A)$ — булеан множества A.

Вариант 34

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Q}; \cdot^{(2)} \rangle,$$

$$X = \left\{ \frac{5}{9},\ -\frac{27}{25} \right\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \forall x\,((x + z < y) \wedge (\forall y \neg\,(y \cdot 2 = u) \to \exists z \forall u\,(u + x = z + y))).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x, y, z)$ такую, что

$$\langle \mathbb{N}; \cdot^{(2)}, \geqslant^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a, b, c) \Longleftrightarrow c < a \leqslant b.$$

4. Напишите формулу $\Phi(x, y, z)$ такую, что

$$\langle \mathcal{P}(A); \cap^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a, b, c) \Longleftrightarrow a \subset c \cup b,$$

где $\mathcal{P}(A)$ — булеан множества A.

Вариант 35

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{C} \setminus \{0\};\ :^{(2)} \rangle,$$

$$X = \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \forall x\, (x < y + z) \vee \forall u\, (y \cdot 2 = u) \to \forall x \forall u\, (z = x + u)\, .$$

3. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathbb{Q}; +^{(2)}, \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a) \Longleftrightarrow a = -\frac{1}{4}.$$

4. Напишите формулу $\Phi(x, y, z)$ такую, что

$$\langle \mathcal{P}(A); \cup^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a, b, c) \Longleftrightarrow a \subset b \cap c,$$

где $\mathcal{P}(A)$ — булеан множества A.

Вариант 36

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}; \cdot^{(2)} \rangle,$$

$$X = \{-8,\ 64\}\, .$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \forall x \forall z \neg \exists y\, (x < y + z) \wedge ((z \cdot 2 = u) \to \forall u\, (z = x + u))\, .$$

3. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathbb{C}; +^{(2)}, \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a) \Longleftrightarrow a = \pm i.$$

4. Подберите нужную сигнатуру и запишите пятый постулат Евклида.

Вариант 37

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Q}; \cdot^{(2)}, :^{(2)} \rangle,$$

$$X = \left\{ 1,\ \frac{3}{2} \right\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons (\forall x\, (z > x) \wedge (x \cdot z = y)) \to \forall y \forall z\, (z = y + u)\,.$$

3. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathbb{Q}; +^{(2)}, \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a) \Longleftrightarrow a = \frac{1}{3}.$$

4. Пусть $\Sigma = \{P^{(2)}\}$. Напишите формулу, описывающую тот факт, что P в любой интерпретации является отношением эквивалентности и что существует класс по этому отношению, содержащий более двух элементов.

Вариант 38

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{C} \setminus \{0\};\ :^{(2)} \rangle,$$

$$X = \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \right\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \forall x\, (x = y \cdot z) \to (\neg \exists y\, (y \cdot u = x) \to \forall z \exists v\, (v - z = x))\,.$$

3. Напишите формулу $\Phi(x, y, z)$ такую, что

$$\langle \mathcal{P}(A); \cup^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a, b, c) \Longleftrightarrow b \cap c \subset a,$$

где $\mathcal{P}(A)$ — булеан множества A.

4. Напишите формулу Φ такую, что

$$\langle \mathbb{C}; \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi,$$

$$\langle \mathbb{R}; \cdot^{(2)} \rangle \nvDash \Phi.$$

Вариант 39

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}; +^{(2)}, -^{(2)} \rangle,$$

$$X = \{-115,\ 40,\ 235\}\,.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \forall x \exists z \forall y\,(x < y + z) \vee ((z \cdot 2 = u) \to \forall u\,(u = x + z))\,.$$

3. Напишите формулу $\Phi(x, y)$ такую, что

$$\langle \mathbb{Z}; +^{(2)}, \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a, b) \Longleftrightarrow (3a - 2b) \vdots 5.$$

4. Напишите формулу Φ такую, что

$$\langle \mathbb{Z}; \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi,$$

$$\langle \mathbb{N}; \cdot^{(2)} \rangle \nvDash \Phi.$$

Вариант 40

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}; -^{(2)} \rangle,$$

$$X = \{14,\ -28\}\,.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \forall x\,(\forall y\,(x < y + z) \wedge (z \cdot x = y)) \to \forall z\,(u = x + z)\,.$$

3. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathbb{R}; +^{(2)}, \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a) \Longleftrightarrow a = \sqrt{3}.$$

4. Напишите формулу Φ такую, что

$$\langle \mathbb{Z}; \leqslant^{(2)} \rangle \vDash \Phi,$$

$$\langle \mathbb{N}; \leqslant^{(2)} \rangle \nvDash \Phi.$$

Вариант 41

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}; +^{(2)}, 4^{(0)} \rangle,$$

$$X = \{32,\ 56\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \forall x \left((x < y + z) \wedge (\forall y \neg (y \cdot 2 = u) \to \exists z \forall u \, (u - z = x + y)) \right).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathbb{Z}; +^{(2)}, \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a) \Longleftrightarrow a = -3.$$

4. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathcal{P}(A); \cap^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a) \Longleftrightarrow a \neq A,$$

где $\mathcal{P}(A)$ — булеан множества A.

Вариант 42

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{C}; +^{(2)} \rangle,$$

$$X = \mathbb{N} \cup \{-i\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons (\forall y \, (x < y + z) \wedge (x \cdot u = z)) \to \forall u \forall y \, (u = y + z).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathcal{P}(A); \cup^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a) \Longleftrightarrow |a| = |A| - 1,$$

где $\mathcal{P}(A)$ — булеан непустого множества A.

4. Пусть $\Sigma = \{P^{(2)}\}$. Напишите формулу, описывающую тот факт, что P в любой интерпретации является отношением порядка. Напишите определение наименьшего элемента.

Вариант 43

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Q}; \cdot^{(2)} \rangle,$$

$$X = \left\{5,\ -\frac{3}{5}\right\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \exists y(\forall x\,(y \leqslant x \vee x = 1) \wedge (x \,\vdots\, y)) \to \forall z\,(x \leqslant z)\,.$$

3. Напишите формулу $\Phi(x, y, z)$ такую, что

$$\langle \mathcal{P}(A); \cap^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a, b, c) \iff c \cup b \subseteq a,$$

где $\mathcal{P}(A)$ — булеан множества A.

4. Напишите формулу Φ такую, что

$$\langle \mathbb{Q}; \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi,$$

$$\langle \mathbb{R}; \cdot^{(2)} \rangle \nvDash \Phi.$$

Вариант 44

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}; +^{(2)}, -^{(2)} \rangle,$$

$$X = \{-3,\ 11\}\,.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \forall z(x \leqslant z + 1 \vee \forall y(y + 1 = z)) \to \exists x(\neg(x + y = 1) \to \forall y(x \leqslant y)).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathcal{P}(A); \cap^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a) \iff |a| = 1,$$

где $\mathcal{P}(A)$ — булеан непустого множества A.

4. Напишите формулу Φ такую, что

$$\langle \mathbb{Q}; \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi,$$

$$\langle \mathbb{Z}; \cdot^{(2)} \rangle \nvDash \Phi.$$

Вариант 45

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{C}; \cdot^{(2)} \rangle,$$

$$X = \left\{ 1 - \sqrt{3} i \right\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \exists x \left(\forall y \left(y = x + 1 \right) \wedge \left(\left(x \cdot 2 = y \right) \to \forall y \left(x = y + z \right) \right) \right).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x, y)$ такую, что

$$\langle \mathcal{P}(A); \cap^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a, b) \Longleftrightarrow a \subset b,$$

где $\mathcal{P}(A)$ — булеан множества A.

4. Подберите нужную сигнатуру и запишите первые четыре постулата Евклида.

Вариант 46

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Q}; \cdot^{(2)} \rangle,$$

$$X = \left\{ \frac{4}{7}, \ -\frac{49}{64} \right\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \forall x \left(x = y - 2 \right) \vee \forall x \left(y \cdot x = u \right) \to \exists x \forall y \left(y - z = x \right).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x, y, z)$ такую, что

$$\langle \mathbb{N}; \cdot^{(2)}, >^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a, b, c) \Longleftrightarrow a < c \leqslant b.$$

4. Напишите формулу Φ такую, что

$$\langle \mathbb{R}; \leqslant^{(2)} \rangle \vDash \Phi,$$

$$\langle \mathbb{Z}; \leqslant^{(2)} \rangle \nvDash \Phi.$$

Вариант 47

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Q}; \cdot^{(2)} \rangle,$$

$$X = \left\{ \frac{3}{5},\ -\frac{27}{125} \right\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \forall y\,(x < y + z) \wedge \forall u\,(y \cdot 2 = u) \to \forall x \forall u\,(u = x + z)\,.$$

3. Напишите формулу $\Phi(x, y, z)$ такую, что

$$\langle \mathbb{N}; \cdot^{(2)}, \geqslant^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a, b, c) \iff c < a \leqslant b.$$

4. Напишите формулу $\Phi(x, y, z)$ такую, что

$$\langle \mathcal{P}(A); \cap^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a, b, c) \iff a \subseteq b \cup c,$$

где $\mathcal{P}(A)$ — булеан множества A.

Вариант 48

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}; +^{(2)}, 6^{(0)} \rangle,$$

$$X = \{15,\ 63\}\,.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons ((x < y + z) \wedge \forall x\,(\forall y \neg\,(y \cdot 2 = u) \to \exists z\,(u = x + z) \vee x = 2))\,.$$

3. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathbb{Z}; +^{(2)}, \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a) \iff a = -4.$$

4. Напишите формулу Φ такую, что

$$\langle \mathbb{Z}; +^{(2)} \rangle \vDash \Phi,$$

$$\langle \mathbb{N}; +^{(2)} \rangle \nvDash \Phi.$$

Вариант 49

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}; +^{(2)}, -^{(2)} \rangle,$$

$$X = \{-130,\ -26,\ 65\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons (\forall x\,(x < y + z) \wedge (z \cdot x = u)) \to \forall u \forall y\,(u = y + z).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x, y)$ такую, что

$$\langle \mathbb{Z}; +^{(2)}, \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a, b) \iff (3a - 5b) \vdots 4.$$

4. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathcal{P}(A); \cup^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a) \iff a = \varnothing,$$

где $\mathcal{P}(A)$ — булеан множества A.

Вариант 50

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{R} \setminus \{0\};\ :^{(2)} \rangle,$$

$$X = \left\{ \frac{6}{7},\ -\frac{36}{49} \right\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \exists x\,(\forall y\,(x + z > y) \wedge (z \cdot x = y)) \to \forall u\,(u = x + z).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x, y, z)$ такую, что

$$\langle \mathcal{P}(A); \cap^{(2)}, \cup^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a, b, c) \iff a \subseteq b \setminus c,$$

где $\mathcal{P}(A)$ — булеан множества A.

4. Напишите формулу Φ такую, что

$$\langle \omega; +^{(2)} \rangle \vDash \Phi,$$

$$\langle \mathbb{Z}; +^{(2)} \rangle \nvDash \Phi.$$

Вариант 51

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{C}; +^{(2)} \rangle,$$

$$X = \mathbb{Z} \cup \{i\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \exists y \big(\forall x \, (y \leqslant x \vee x = 1) \wedge (x \,\vdots\, y)\big) \to \exists z \, \big(x \leqslant z\big).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathcal{P}(A); \cup^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a) \iff a = A,$$

где $\mathcal{P}(A)$ — булеан множества A.

4. Напишите формулу Φ такую, что

$$\langle \mathbb{N}; +^{(2)} \rangle \vDash \Phi,$$

$$\langle \mathbb{Z}; +^{(2)} \rangle \nvDash \Phi.$$

Вариант 52

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}; +^{(2)}, -^{(2)} \rangle,$$

$$X = \{-2, \ 7\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \exists x \, \big(\exists y \, (y = x + 1) \wedge \big((x \cdot 2 = y) \to \forall y \, (x = y + z)\big)\big).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathcal{P}(A); \cap^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a) \iff a = \varnothing,$$

где $\mathcal{P}(A)$ — булеан множества A.

4. Напишите формулу Φ такую, что

$$\langle \mathbb{Z}; \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi,$$

$$\langle \mathbb{Q}; \cdot^{(2)} \rangle \nvDash \Phi.$$

Вариант 53

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}; +^{(2)}, -^{(2)} \rangle,$$

$$X = \{-132,\ 39,\ 252\}\,.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \forall x \left(\exists y\,(x < y + z) \wedge (z \cdot x = y)\right) \to \forall u \left(u = x + z\right).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x, y)$ такую, что

$$\langle \mathbb{Z}; +^{(2)}, \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a, b) \Longleftrightarrow (2a - 3b) \vdots 4.$$

4. Напишите формулу Φ такую, что

$$\langle \mathbb{N}; \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi,$$

$$\langle \mathbb{Z}; \cdot^{(2)} \rangle \nvDash \Phi.$$

Вариант 54

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Q}; \cdot^{(2)} \rangle,$$

$$X = \left\{3,\ \frac{1}{4}\right\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \exists z \left(x \leqslant z + 1 \vee \forall y\,(y + 1 = z)\right) \to \exists x \left(\neg(x + y = 1) \to \forall y\,(x \leqslant y)\right).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x, y, z)$ такую, что

$$\langle \mathcal{P}(A); \cap^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a, b, c) \Longleftrightarrow a \cup b \subseteq c,$$

где $\mathcal{P}(A)$ — булеан множества A.

4. Напишите формулу Φ такую, что

$$\langle \mathbb{R}; \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi,$$

$$\langle \mathbb{Q}; \cdot^{(2)} \rangle \nvDash \Phi.$$

Вариант 55

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}; +^{(2)}, 6^{(0)} \rangle,$$

$$X = \{18,\ 60\}\,.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \forall x \big((x < y + z) \wedge (z \cdot x = u)\big) \to \forall u \exists y \big(u = y + z\big).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathbb{Z}; +^{(2)}, \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a) \iff a = -2.$$

4. Пусть $\Sigma = \{P^{(2)}\}$. Напишите формулу, описывающую тот факт, что P в любой интерпретации является отношением нестрогого порядка. Напишите определение максимального элемента.

Вариант 56

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Q}; \cdot^{(2)} \rangle,$$

$$X = \left\{\frac{3}{5},\ -\frac{125}{27}\right\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \exists y\,(x < y + z) \wedge \forall u\,(y \cdot 2 = u) \to \forall x \forall u\,(u = x + z)\,.$$

3. Напишите формулу $\Phi(x, y, z)$ такую, что

$$\langle \mathbb{N}; \cdot^{(2)}, >^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a, b, c) \iff a \leqslant c \leqslant b.$$

4. Напишите формулу Φ такую, что

$$\langle \mathbb{Z}; \leqslant^{(2)} \rangle \vDash \Phi,$$

$$\langle \mathbb{R}; \leqslant^{(2)} \rangle \nvDash \Phi.$$

Вариант 57

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{R} \setminus \{0\};\ :^{(2)} \rangle,$$

$$X = \left\{ \frac{2}{7},\ -\frac{4}{49} \right\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \big(x < y + z\big) \wedge \forall x \left(\exists y \,(y \cdot 2 = u) \to \exists z\,(u = x + z) \vee (x = 2)\right).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x, y, z)$ такую, что

$$\langle \mathcal{P}(A); \cap^{(2)}, \cup^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a, b, c) \iff c \subseteq a \setminus b,$$

где $\mathcal{P}(A)$ — булеан множества A.

4. Напишите формулу Φ такую, что

$$\langle \mathbb{Z}; +^{(2)} \rangle \vDash \Phi,$$

$$\langle \omega; +^{(2)} \rangle \nvDash \Phi.$$

Вариант 58

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{C}; \cdot^{(2)} \rangle,$$

$$X = \left\{ 1 + \sqrt{3}i \right\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \forall x\,(x = y - 2) \vee \exists x\,(y \cdot x = u) \to \exists x \forall y\,(y - z = x)\,.$$

3. Напишите формулу $\Phi(x, y)$ такую, что

$$\langle \mathcal{P}(A); \cap^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a, b) \iff a \subseteq b,$$

где $\mathcal{P}(A)$ — булеан множества A.

4. Пусть $\Sigma = \{P^{(2)}\}$. Напишите формулу, описывающую тот факт, что P в любой интерпретации является отношением эквивалентности.

Вариант 59

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}; +^{(2)}, -^{(2)} \rangle,$$

$$X = \{128,\ -28,\ 34\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \exists x \left(\exists y \, (x + z > y) \wedge (z \cdot x = y) \right) \to \forall u \left(u = x + z \right).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x, y)$ такую, что

$$\langle \mathbb{Z}; +^{(2)}, \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a, b) \Longleftrightarrow (4a - 2b) \vdots 3.$$

4. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathcal{P}(A); \cup^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a) \Longleftrightarrow a = \varnothing,$$

где $\mathcal{P}(A)$ — булеан множества A.

Вариант 60

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Q}; \cdot^{(2)}, :^{(2)} \rangle,$$

$$X = \left\{ 2,\ \frac{1}{2} \right\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \exists x \left(x = y \cdot z \right) \to \left(\exists y \, (y \cdot u = x) \to \forall z \exists v \, (v - z = x) \right).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathbb{Q}; +^{(2)}, \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a) \Longleftrightarrow a = \frac{1}{2}.$$

4. Подберите нужную сигнатуру и запишите аксиому Лобачевского о параллельных прямых.

Вариант 61

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}; \cdot^{(2)} \rangle,$$

$$X = \{-3,\ 9\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons (\forall x\, (z > x) \vee (x \cdot z = y)) \to \exists y \forall z\, (z = y + u).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathbb{C}; +^{(2)}, \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a) \Longleftrightarrow a = \pm i.$$

4. Подберите нужную сигнатуру и запишите следующую аксиому стереометрии: «Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости».

Вариант 62

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}; -^{(2)} \rangle,$$

$$X = \{22,\ -36\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \forall x\, ((x < y + z) \wedge (\exists y\, (y \cdot 2 = u) \to \exists z \forall u\, (u - z = x + y))).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathbb{R}; +^{(2)}, \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a) \Longleftrightarrow a = \sqrt{2}.$$

4. Напишите формулу Φ такую, что

$$\langle \mathbb{N}; \leqslant^{(2)} \rangle \vDash \Phi,$$

$$\langle \mathbb{Z}; \leqslant^{(2)} \rangle \nvDash \Phi.$$

Вариант 63

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{C}; +^{(2)} \rangle,$$

$$X = \mathbb{Z} \cup \{i\}\,.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \exists y \left(\forall x \, (y \leqslant x \vee x = 1) \wedge (x \,\vdots\, y) \right) \to \exists z \left(x \leqslant z \right).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathcal{P}(A); \cup^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a) \Longleftrightarrow a = A,$$

где $\mathcal{P}(A)$ — булеан множества A.

4. Напишите формулу Φ такую, что

$$\langle \mathbb{N}; +^{(2)} \rangle \vDash \Phi,$$

$$\langle \mathbb{Z}; +^{(2)} \rangle \nvDash \Phi.$$

Вариант 64

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}; +^{(2)}, -^{(2)} \rangle,$$

$$X = \{-2,\ 7\}\,.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \exists x \left(\exists y \, (y = x + 1) \wedge \left((x \cdot 2 = y) \to \forall y \, (x = y + z) \right) \right).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathcal{P}(A); \cap^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a) \Longleftrightarrow a = \varnothing,$$

где $\mathcal{P}(A)$ — булеан множества A.

4. Напишите формулу Φ такую, что

$$\langle \mathbb{Z}; \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi,$$

$$\langle \mathbb{Q}; \cdot^{(2)} \rangle \nvDash \Phi.$$

Вариант 65

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}; +^{(2)}, -^{(2)} \rangle,$$

$$X = \{-132,\ 39,\ 252\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \forall x \left(\exists y\, (x < y + z) \wedge (z \cdot x = y)\right) \to \forall u \left(u = x + z\right).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x, y)$ такую, что

$$\langle \mathbb{Z}; +^{(2)}, \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a, b) \iff (2a - 3b) \vdots 4.$$

4. Напишите формулу Φ такую, что

$$\langle \mathbb{N}; \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi,$$

$$\langle \mathbb{Z}; \cdot^{(2)} \rangle \nvDash \Phi.$$

Вариант 66

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Q}; \cdot^{(2)} \rangle,$$

$$X = \left\{3,\ \frac{1}{4}\right\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \exists z \left(x \leqslant z + 1 \vee \forall y\, (y + 1 = z)\right) \to \exists x \left(\neg(x + y = 1) \to \forall y\, (x \leqslant y)\right).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x, y, z)$ такую, что

$$\langle \mathcal{P}(A); \cap^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a, b, c) \iff a \cup b \subseteq c,$$

где $\mathcal{P}(A)$ — булеан множества A.

4. Напишите формулу Φ такую, что

$$\langle \mathbb{R}; \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi,$$

$$\langle \mathbb{Q}; \cdot^{(2)} \rangle \nvDash \Phi.$$

Вариант 67

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}; +^{(2)}, 6^{(0)} \rangle,$$

$$X = \{18,\ 60\}\,.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \forall x \,\big((x < y + z) \wedge (z \cdot x = u)\big) \to \forall u \exists y \,\big(u = y + z\big).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathbb{Z}; +^{(2)}, \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a) \iff a = -2.$$

4. Пусть $\Sigma = \{P^{(2)}\}$. Напишите формулу, описывающую тот факт, что P в любой интерпретации является отношением нестрогого порядка. Напишите определение максимального элемента.

Вариант 68

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Q}; \cdot^{(2)} \rangle,$$

$$X = \left\{\frac{3}{5},\ -\frac{125}{27}\right\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \exists y \,(x < y + z) \wedge \forall u \,(y \cdot 2 = u) \to \forall x \forall u \,(u = x + z)\,.$$

3. Напишите формулу $\Phi(x, y, z)$ такую, что

$$\langle \mathbb{N}; \cdot^{(2)}, >^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a, b, c) \iff a \leqslant c \leqslant b.$$

4. Напишите формулу Φ такую, что

$$\langle \mathbb{Z}; \leqslant^{(2)} \rangle \vDash \Phi,$$

$$\langle \mathbb{R}; \leqslant^{(2)} \rangle \nvDash \Phi.$$

Вариант 69

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{R} \setminus \{0\};\ :^{(2)} \rangle,$$

$$X = \left\{ \frac{2}{7},\ -\frac{4}{49} \right\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \risingdotseq \big(x < y + z\big) \wedge \forall x\, \big(\exists y\, (y \cdot 2 = u) \to \exists z\, (u = x + z) \vee (x = 2)\big).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x, y, z)$ такую, что

$$\langle \mathcal{P}(A); \cap^{(2)}, \cup^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a, b, c) \iff c \subseteq a \setminus b,$$

где $\mathcal{P}(A)$ — булеан множества A.

4. Напишите формулу Φ такую, что

$$\langle \mathbb{Z}; +^{(2)} \rangle \vDash \Phi,$$

$$\langle \omega; +^{(2)} \rangle \nvDash \Phi.$$

Вариант 70

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{C}; \cdot^{(2)} \rangle,$$

$$X = \left\{ 1 + \sqrt{3} i \right\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \risingdotseq \forall x\, (x = y - 2) \vee \exists x\, (y \cdot x = u) \to \exists x \forall y\, (y - z = x)\,.$$

3. Напишите формулу $\Phi(x, y)$ такую, что

$$\langle \mathcal{P}(A); \cap^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a, b) \iff a \subseteq b,$$

где $\mathcal{P}(A)$ — булеан множества A.

4. Пусть $\Sigma = \{P^{(2)}\}$. Напишите формулу, описывающую тот факт, что P в любой интерпретации является отношением эквивалентности.

Вариант 71

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}; +^{(2)}, -^{(2)} \rangle,$$

$$X = \{128,\ -28,\ 34\}\,.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \exists x \left(\exists y\,(x + z > y) \wedge (z \cdot x = y)\right) \to \forall u \left(u = x + z\right).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x, y)$ такую, что

$$\langle \mathbb{Z}; +^{(2)}, \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a, b) \Longleftrightarrow (4a - 2b) \vdots 3.$$

4. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathcal{P}(A); \cup^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a) \Longleftrightarrow a = \varnothing,$$

где $\mathcal{P}(A)$ — булеан множества A.

Вариант 72

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Q}; \cdot^{(2)}, :^{(2)} \rangle,$$

$$X = \left\{2,\ \frac{1}{2}\right\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \exists x \left(x = y \cdot z\right) \to \left(\exists y\,(y \cdot u = x) \to \forall z \exists v\,(v - z = x)\right).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathbb{Q}; +^{(2)}, \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a) \Longleftrightarrow a = \frac{1}{2}.$$

4. Подберите нужную сигнатуру и запишите аксиому Лобачевского о параллельных прямых.

Вариант 73

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}; \cdot^{(2)} \rangle,$$

$$X = \{-3,\ 9\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons (\forall x\,(z > x) \vee (x \cdot z = y)) \to \exists y \forall z\,(z = y + u).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathbb{C}; +^{(2)}, \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a) \iff a = \pm i.$$

4. Подберите нужную сигнатуру и запишите следующую аксиому стереометрии: «Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости».

Вариант 74

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}; -^{(2)} \rangle,$$

$$X = \{22,\ -36\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \forall x\,((x < y + z) \wedge (\exists y\,(y \cdot 2 = u) \to \exists z \forall u\,(u - z = x + y))).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathbb{R}; +^{(2)}, \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a) \iff a = \sqrt{2}.$$

4. Напишите формулу Φ такую, что

$$\langle \mathbb{N}; \leqslant^{(2)} \rangle \vDash \Phi,$$

$$\langle \mathbb{Z}; \leqslant^{(2)} \rangle \nvDash \Phi.$$

Вариант 75

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{C} \setminus \{0\};\ :^{(2)} \rangle,$$

$$X = \left\{ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \exists x \forall z \exists y \, (x < y + z) \wedge ((z \cdot 2 = u) \to \forall u \, (z = x + u)) \, .$$

3. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathbb{Q}; +^{(2)}, \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a) \Longleftrightarrow a = -\frac{1}{2}.$$

4. Напишите формулу $\Phi(x, y, z)$ такую, что

$$\langle \mathcal{P}(A); \cup^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a, b, c) \Longleftrightarrow c \subseteq a \cap b,$$

где $\mathcal{P}(A)$ — булеан множества A.

Вариант 76

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{R} \setminus \{0\};\ :^{(2)} \rangle,$$

$$X = \left\{ \frac{4}{5},\ -\frac{25}{16} \right\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons ((z + x < y) \wedge \exists x \, (\forall y \, (y \cdot x = u) \to \exists z \, (u + z = x) \vee y = 2)) \, .$$

3. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathbb{C}; +^{(2)}, \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a) \Longleftrightarrow a = \pm i.$$

4. Напишите формулу $\Phi(x, y, z)$ такую, что

$$\langle \mathcal{P}(A); \cap^{(2)}, \cup^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a, b, c) \Longleftrightarrow a \setminus b \subseteq c,$$

где $\mathcal{P}(A)$ — булеан множества A.

Вариант 77

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{C} \setminus \{0\};\ :^{(2)} \rangle,$$

$$X = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i \right\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \forall x \exists z \exists y\, (x < y + z) \wedge ((z \cdot 2 = u) \to \forall u\, (u = x + z)).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x, y, z)$ такую, что

$$\langle \mathcal{P}(A); \cup^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a, b, c) \iff a \cap b \subseteq c,$$

где $\mathcal{P}(A)$ — булеан множества A.

4. Напишите формулу Φ такую, что

$$\langle \mathbb{R}; \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi,$$

$$\langle \mathbb{C}; \cdot^{(2)} \rangle \nvDash \Phi.$$

Вариант 78

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{C} \setminus \{0\};\ :^{(2)} \rangle,$$

$$X = \left\{ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \exists x \forall z \exists y\, (x < y + z) \wedge ((z \cdot 2 = u) \to \forall u\, (z = x + u)).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathbb{Q}; +^{(2)}, \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a) \iff a = -\frac{1}{2}.$$

4. Напишите формулу $\Phi(x, y, z)$ такую, что

$$\langle \mathcal{P}(A); \cup^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a, b, c) \iff c \subseteq a \cap b,$$

где $\mathcal{P}(A)$ — булеан множества A.

Вариант 79

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}; +^{(2)}, 4^{(0)} \rangle,$$

$$X = \{48,\ 64\}\,.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons (\exists y\,(x < y + z) \wedge (x \cdot u = z)) \to \forall u \forall y\,(u = y + z)\,.$$

3. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathbb{Z}; +^{(2)}, \cdot^{(2)} \rangle \models \Phi(a) \iff a = 3.$$

4. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathcal{P}(A); \cap^{(2)} \rangle \models \Phi(a) \iff a = A,$$

где $\mathcal{P}(A)$ — булеан множества A.

Вариант 80

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}; -^{(2)} \rangle,$$

$$X = \{15,\ -39\}\,.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \exists x\,((x + z < y) \wedge (\forall y\,(y \cdot 2 = u) \to \exists z \forall u\,(u + x = z + y)))\,.$$

3. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathbb{R}; +^{(2)}, \cdot^{(2)} \rangle \models \Phi(a) \iff a = -\sqrt{2}.$$

4. Напишите формулу $\Phi(x, y)$ такую, что

$$\langle \mathcal{P}(A); \cup^{(2)} \rangle \models \Phi(a, b) \iff a \subseteq b,$$

где $\mathcal{P}(A)$ — булеан множества A.

Вариант 81

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Q}; \cdot^{(2)} \rangle,$$

$$X = \left\{ \frac{4}{3},\ -\frac{9}{8} \right\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \exists x\,(x < y + z) \land \exists u \neg\,(y \cdot 2 = u) \to \forall x \forall u\,(z = x + u)\,.$$

3. Напишите формулу $\Phi(x, y, z)$ такую, что

$$\langle \mathbb{N}; \cdot^{(2)}, \geqslant^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a, b, c) \iff c < b < a.$$

4. Напишите формулу $\Phi(x, y, z)$ такую, что

$$\langle \mathcal{P}(A); \cap^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a, b, c) \iff b \subseteq c \cup a,$$

где $\mathcal{P}(A)$ — булеан множества A.

Вариант 82

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}; \cdot^{(2)} \rangle,$$

$$X = \{-4,\ 16\}\,.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \exists x\,(x < y + z) \land \exists u\,(y \cdot 2 = u) \to \forall x \neg \forall u\,(z = x + u)\,.$$

3. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathbb{C}; +^{(2)}, \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a) \iff a = \pm i.$$

4. Подберите нужную сигнатуру и запишите следующую аксиому стереометрии: «Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей».

Вариант 83

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}; +^{(2)}, -^{(2)} \rangle,$$

$$X = \{-124,\ 56,\ 216\}\,.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons (\exists x\,(z > x) \wedge (x \cdot z = y)) \to \exists y \forall z\,(z = y + u)\,.$$

3. Напишите формулу $\Phi(x, y)$ такую, что

$$\langle \mathbb{Z}; +^{(2)}, \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a, b) \iff (2a - 3b) \vdots 4.$$

4. Напишите формулу Φ такую, что

$$\langle \mathbb{Z}; \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi,$$

$$\langle \mathbb{N}; \cdot^{(2)} \rangle \nvDash \Phi.$$

Вариант 84

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{C}; +^{(2)} \rangle,$$

$$X = \mathbb{Q} \cup \{2i\}\,.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \exists x\,(\exists y\,(x < y + z) \vee (z \cdot x = y)) \to \forall u\,(u = x + z)\,.$$

3. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathcal{P}(A); \cup^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a) \iff a = A,$$

где $\mathcal{P}(A)$ — булеан множества A.

4. Пусть $\Sigma = \{P^{(2)}\}$. Напишите формулу, описывающую тот факт, что P в любой интерпретации является отношением порядка. Напишите определение наибольшего элемента.

Вариант 85

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}; -^{(2)} \rangle,$$

$$X = \{-21,\ -36\}\,.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \exists y (\neg \exists x\, (y \leqslant x \vee x = 1) \wedge (x \,\vdots\, y)) \to \exists z\, (x \leqslant z)\,.$$

3. Напишите формулу $\Phi(x, y, z)$ такую, что

$$\langle \mathcal{P}(A); \cap^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a, b, c) \Longleftrightarrow b \cup c \subseteq a,$$

где $\mathcal{P}(A)$ — булеан множества A.

4. Напишите формулу Φ такую, что

$$\langle \mathbb{Z}; \leqslant^{(2)} \rangle \vDash \Phi,$$

$$\langle \mathbb{N}; \leqslant^{(2)} \rangle \nvDash \Phi.$$

Вариант 86

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Q}; \cdot^{(2)} \rangle,$$

$$X = \left\{\frac{1}{3},\ 4\right\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \exists x\, ((x < y + z) \vee (\exists y\, (y \cdot 2 = u) \to \exists z \forall u\, (u - z = x + y)))\,.$$

3. Пусть $\Sigma = \{P^{(2)}\}$. Напишите формулу, описывающую тот факт, что P в любой интерпретации является отношением эквивалентности и что существует одноэлементный класс по этому отношению.

4. Напишите формулу Φ такую, что

$$\langle \mathbb{Q}; \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi,$$

$$\langle \mathbb{R}; \cdot^{(2)} \rangle \nvDash \Phi.$$

Вариант 87

1. Постройте подсистему алгебраической системы $\mathfrak{A}$, порождённую множеством X:

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}; +^{(2)}, -^{(2)} \rangle,$$

$$X = \{-3,\ 8\}.$$

2. Выпишите все подформулы формулы Φ, определите её свободные переменные:

$$\Phi \leftrightharpoons \exists x\,(x = y \cdot z) \to (\neg \exists y\,(y \cdot u = x) \to \exists z \exists v\,(v - z = x)).$$

3. Напишите формулу $\Phi(x)$ такую, что

$$\langle \mathbb{R}; +^{(2)}, \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi(a) \Longleftrightarrow a = \sqrt{3}.$$

4. Напишите формулу Φ такую, что

$$\langle \mathbb{Q}; \cdot^{(2)} \rangle \vDash \Phi,$$

$$\langle \mathbb{Z}; \cdot^{(2)} \rangle \nvDash \Phi.$$