

ИДЗ №11. Линейные операторы

Добро пожаловать в сборник заданий последнего ИДЗ по алгебре!

ИДЗ нужно решить самостоятельно (!), оформить на двойном чистом листочке и сдать не позднее *16 июня*. Все решения **должны быть отражены** на листочке.

Всего хорошего!

Варианты

- | | |
|----------------------|--------------------------|
| 1. Белова Амина | 8. Попова Ангелина |
| 2. Бойко Вероника | 9. Бысь Анастасия |
| 3. Волкова Алина | 10. Рожкова Виктория |
| 4. Кайгородова Анна | 11. Сабанцева Полина |
| 5. Калмыкова Эльвира | 12. Свириденко Анастасия |
| 6. Кисарова Мария | 13. Тулисова Елизавета |
| 7. Кухарь Мария | 14. Усик Екатерина |

Задание №1. Проверьте, являются ли отображения $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ линейными. Если какое-то отображение является линейным, найдите его ядро и образ и выясните, является ли это отображение мономорфизмом, эпиморфизмом и изоморфизмом.

1. $\varphi_1((x_1, x_2, x_3)) = (x_2 + x_3, 2x_2, -x_3).$
 $\varphi_2((x_1, x_2, x_3)) = (x_2 - x_3, x_3x_1, x_1 - x_2).$
2. $\varphi_1((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 - x_3 + x_2, 2x_2 + 4, 0).$
 $\varphi_2((x_1, x_2, x_3)) = (2x_3, x_2 - x_1, x_2).$
3. $\varphi_1((x_1, x_2, x_3)) = (-2x_3, x_2x_1, 2x_1 - 3x_3).$
 $\varphi_2((x_1, x_2, x_3)) = (-x_1, x_2 - x_3 + x_1, x_3).$
4. $\varphi_1((x_1, x_2, x_3)) = (x_3 - 5x_2, 2x_1 + 3x_2, x_3 + x_2).$
 $\varphi_2((x_1, x_2, x_3)) = (x_2 + 2x_1, x_3 - 3x_2, x_1 + 2).$
5. $\varphi_1((x_1, x_2, x_3)) = (x_2, x_13x_3, 2x_3).$
 $\varphi_2((x_1, x_2, x_3)) = (x_2 - x_3, x_3 - x_1, x_1 - x_2).$
6. $\varphi_1((x_1, x_2, x_3)) = (x_3 + 2x_1, x_2, x_3).$
 $\varphi_2((x_1, x_2, x_3)) = (x_1, x_2 + x_1, x_1 - 2).$
7. $\varphi_1((x_1, x_2, x_3)) = (3x_2, x_1 - x_2, 2x_3).$
 $\varphi_2((x_1, x_2, x_3)) = (x_32x_1, x_2, x_3).$
8. $\varphi_1((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1, -x_3 + 2, x_1 + x_2 - 3x_3).$
 $\varphi_2((x_1, x_2, x_3)) = (3x_1, -x_2 + x_1, x_3 - 4x_2).$
9. $\varphi_1((x_1, x_2, x_3)) = (2x_3, 0, -4x_2 + x_1 - 3x_3).$
 $\varphi_2((x_1, x_2, x_3)) = (4x_2, 2x_2 + x_3, x_33x_2).$
10. $\varphi_1((x_1, x_2, x_3)) = (x_1x_2, 0, 2x_1 + 3x_2 + 2x_3).$
 $\varphi_2((x_1, x_2, x_3)) = (2x_2, x_1 - 3x_3, x_1).$
11. $\varphi_1((x_1, x_2, x_3)) = (x_2 - x_1, x_3, x_1 - x_2).$
 $\varphi_2((x_1, x_2, x_3)) = (3x_2, x_1 - x_2, 2x_3 + 1).$
12. $\varphi_1((x_1, x_2, x_3)) = (2x_2, 3x_3, x_1 + x_2 - x_3).$
 $\varphi_1((x_1, x_2, x_3)) = (-x_2, -x_3 - x_1 + 2, x_2 + x_3).$
13. $\varphi_1((x_1, x_2, x_3)) = (-x_2, -x_3 - x_1, x_2 + x_3).$
 $\varphi_2((x_1, x_2, x_3)) = (3x_1, -x_2x_1, x_3 - 4x_2).$
14. $\varphi_1((x_1, x_2, x_3)) = (2x_3, x_2 - x_1, x_2 - 3).$
 $\varphi_2((x_1, x_2, x_3)) = (x_3 + x_2, 2x_1, 3x_3 + 2x_1).$

Задание №2. Пусть L — линейное пространство над полем $\mathbb{R}$, $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ — базис L . Найдите собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\varphi : L \rightarrow L$, определяемого следующим образом:

$$1. \begin{cases} \varphi(\bar{e}_1) = 3\bar{e}_1 - 2\bar{e}_2 - 8\bar{e}_3, \\ \varphi(\bar{e}_2) = 4\bar{e}_1 - 12\bar{e}_2 - 58\bar{e}_3, \\ \varphi(\bar{e}_3) = 3\bar{e}_2 + 15\bar{e}_3. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} \varphi(\bar{e}_1) = 35\bar{e}_1 + 24\bar{e}_2 - 24\bar{e}_3, \\ \varphi(\bar{e}_2) = -35\bar{e}_1 - 23\bar{e}_2 + 27\bar{e}_3, \\ \varphi(\bar{e}_3) = 11\bar{e}_1 + 8\bar{e}_2 - 6\bar{e}_3. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \varphi(\bar{e}_1) = -13\bar{e}_1 + 42\bar{e}_2 - 48\bar{e}_3, \\ \varphi(\bar{e}_2) = 8\bar{e}_1 - 21\bar{e}_2 + 26\bar{e}_3, \\ \varphi(\bar{e}_3) = 12\bar{e}_1 - 33\bar{e}_2 + 40\bar{e}_3. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} \varphi(\bar{e}_1) = -39\bar{e}_1 + 13\bar{e}_2 - 51\bar{e}_3, \\ \varphi(\bar{e}_2) = 12\bar{e}_1 - 2\bar{e}_2 + 15\bar{e}_3, \\ \varphi(\bar{e}_3) = 36\bar{e}_1 - 12\bar{e}_2 + 47\bar{e}_3. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \varphi(\bar{e}_1) = 7\bar{e}_1 + 6\bar{e}_2 - 6\bar{e}_3, \\ \varphi(\bar{e}_2) = 8\bar{e}_1 + 15\bar{e}_2 - 12\bar{e}_3, \\ \varphi(\bar{e}_3) = 10\bar{e}_1 + 15\bar{e}_2 - 12\bar{e}_3. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} \varphi(\bar{e}_1) = -16\bar{e}_1 + 13\bar{e}_2 - 28\bar{e}_3, \\ \varphi(\bar{e}_2) = -10\bar{e}_1 + 9\bar{e}_2 - 16\bar{e}_3, \\ \varphi(\bar{e}_3) = 7\bar{e}_1 - 5\bar{e}_2 + 13\bar{e}_3. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \varphi(\bar{e}_1) = 17\bar{e}_1 + 10\bar{e}_2 + 5\bar{e}_3, \\ \varphi(\bar{e}_2) = -36\bar{e}_1 - 22\bar{e}_2 - 12\bar{e}_3, \\ \varphi(\bar{e}_3) = 24\bar{e}_1 + 16\bar{e}_2 + 10\bar{e}_3. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} \varphi(\bar{e}_1) = -\bar{e}_1 - 11\bar{e}_2 + 17\bar{e}_3, \\ \varphi(\bar{e}_2) = 2\bar{e}_1 + 10\bar{e}_2 - 13\bar{e}_3, \\ \varphi(\bar{e}_3) = 2\bar{e}_2 - 3\bar{e}_3. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \varphi(\bar{e}_1) = 8\bar{e}_1 - 2\bar{e}_2 - 6\bar{e}_3, \\ \varphi(\bar{e}_2) = -15\bar{e}_1 + 7\bar{e}_2 + 15\bar{e}_3, \\ \varphi(\bar{e}_3) = 12\bar{e}_1 - 4\bar{e}_2 - 10\bar{e}_3. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} \varphi(\bar{e}_1) = -4\bar{e}_1 - 3\bar{e}_2 - 12\bar{e}_3, \\ \varphi(\bar{e}_2) = 6\bar{e}_1 + 5\bar{e}_2 + 12\bar{e}_3, \\ \varphi(\bar{e}_3) = 2\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 6\bar{e}_3. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \varphi(\bar{e}_1) = -\bar{e}_1 - 4\bar{e}_2 - 4\bar{e}_3, \\ \varphi(\bar{e}_2) = 4\bar{e}_1 + 7\bar{e}_2 + 6\bar{e}_3, \\ \varphi(\bar{e}_3) = -\bar{e}_1 - \bar{e}_2. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} \varphi(\bar{e}_1) = 14\bar{e}_1 - \bar{e}_2 - 4\bar{e}_3, \\ \varphi(\bar{e}_2) = -36\bar{e}_1 + 5\bar{e}_2 + 12\bar{e}_3, \\ \varphi(\bar{e}_3) = 44\bar{e}_1 - 4\bar{e}_2 + 13\bar{e}_3. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} \varphi(\bar{e}_1) = 15\bar{e}_1 + 12\bar{e}_2 + 16\bar{e}_3, \\ \varphi(\bar{e}_2) = -2\bar{e}_1 - \bar{e}_2 - 2\bar{e}_3, \\ \varphi(\bar{e}_3) = -8\bar{e}_1 - 7\bar{e}_2 - 8\bar{e}_3. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} \varphi(\bar{e}_1) = -14\bar{e}_1 + 28\bar{e}_2 - 12\bar{e}_3, \\ \varphi(\bar{e}_2) = -6\bar{e}_1 + 13\bar{e}_2 - 4\bar{e}_3, \\ \varphi(\bar{e}_3) = 6\bar{e}_1 - 10\bar{e}_2 + 7\bar{e}_3. \end{cases}$$