

Третий Приморский математический турнир
Отборочный тур, 24 ноября 2024 г.

Правила

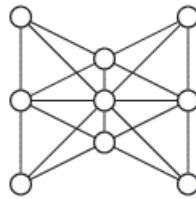
- На выполнение заданий даётся *60 минут*.
- Решите задачу, запишите ответ в *бланке ответов* и покажите его проверяющему.
- Запишите *подробное решение* задачи 5 в каждом блоке и сдайте его проверяющему.
- За каждый неверный ответ *снимается* один балл.
- *Бонусы:*
 - первыми получили ответ на вопрос: +1 балл,
 - первыми получили ответы на все вопросы из блока: +2 балла.

Бланк ответов

задание	ответ	отметка	время	примечание
<i>Числа и вычисления</i>				
1				
2				
3				
4				
5				
<i>Фигуры</i>				
6				
7				
8				
9				
10				
<i>Рассуждения</i>				
11				
12				
13				
14				
15				

1. *2 балла.* Кирилл вынимает из мешка чёрные и красные конфеты и складывает их в две стопки. Класть конфету на другую конфету того же цвета запрещено. Десятая и одиннадцатая конфеты, выложенные Кириллом, — красные, а двадцать пятая — чёрная. Какого цвета двадцать шестая выложенная конфета?
2. *2 балла.* Даны 10 чисел — одна единица и 9 нулей. Разрешается выбирать два числа и заменять каждое из них их средним арифметическим. Какое наименьшее число может оказаться на месте единицы?
3. *2 балла.* Произведение 22 целых чисел равно 1. Чему равна их сумма? Укажите все варианты.
4. *3 балла.* Используя в качестве чисел любое количество монет достоинством 1, 2, 5 и 10 рублей, а также (бесплатные) скобки и знаки четырёх арифметических действий, составьте выражение со значением 287, потратив не более 17 рублей.
5. *4 балла, подробное решение.* В хоккейном турнире принимают участие n команд. Каждая команда встречается с каждой по одному разу, при этом выигравшей команде присуждается 2 очка, сыгравшей вничью — 1, проигравшей — 0 очков. Какой максимальный разрыв в очках может быть между командами, занявшими соседние места?

6. 2 балла. Сколькими способами можно разбить прямоугольник 8×2 на прямоугольники 1×2 ?
7. 2 балла. По неподвижной окружности, касаясь её изнутри, катится без скольжения окружность вдвое меньшего радиуса. Какую траекторию описывает фиксированная точка K подвижной окружности?
8. 3 балла. В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан прямоугольник так, что две его вершины находятся на гипотенузе, а две другие — на катетах. Найдите стороны прямоугольника, являющиеся целыми числами, если известно, что они относятся как $5 : 2$, а гипотенуза треугольника равна 45.
9. 3 балла. На столе лежат 9 яблок, образуя 10 рядов по 3 яблока в каждом (см. рис.).



- Известно, что у девяти рядов веса одинаковы, а вес десятого ряда от них отличается. Есть электронные весы, на которых за рубль можно узнать вес любой группы яблок. Какое наименьшее число рублей Савелию нужно заплатить, чтобы узнать, вес какого именно ряда отличается?
10. 4 балла, подробное решение. Окружность с центром O проходит через вершины A и B треугольника ABC и пересекает сторону AC в точке M и сторону BC в точке N . Углы AOM и BON равны 60° . Расстояние от точки N до прямой AB равно $5\sqrt{3}$. Отрезок MN в четыре раза меньше отрезка AB . Найдите площадь треугольника ABC .

11. *2 балла.* Имеются 6 запертых чемоданов и 6 ключей к ним. При этом неизвестно, к какому чемодану подходит какой ключ. Какое наименьшее число попыток надо сделать Жене, чтобы наверняка открыть все чемоданы?
12. *2 балла.* Три друга — Антон, Иван и Евгений — учатся на математическом, физическом и химическом факультетах. Если Антон математик, то Евгений не физик. Если Иван не физик, то Антон математик. Если Евгений не математик, то Иван — химик. На кого учится Иван?
13. *3 балла.* В комнате 12 человек. Некоторые из них честные, то есть всегда говорят правду, остальные всегда лгут.
- «Здесь нет ни одного честного человека», - сказал первый.
- «Здесь не более одного честного человека», - сказал второй.
- Третий сказал, что честных не более двух, четвёртый — что не более трёх, и так далее до двенадцатого, который сказал, что честных людей не более одиннадцати. Сколько честных людей в комнате на самом деле?
14. *3 балла.* Два мудреца Полина и Кирилл играют в следующую игру. Выписаны числа $0, 1, 2, \dots, 1024$. Полина зачёркивает 512 чисел (по своему выбору), затем Кирилл зачёркивает 256 из оставшихся, затем снова Полина зачёркивает 128 чисел и т.д. На десятом шаге мудрец Кирилл зачёркивает одно число; остаются два числа. После этого Кирилл платит Полине разницу между этими числами. Сколько уплатит Кирилл Полине, если оба будут играть наилучшим образом?
15. *4 балла, подробное решение.* Настя и Полина играют в следующую игру. Из мешка, первоначально содержащего 1331 конфету, они по очереди берут конфеты, причем первый ход делает Настя и берёт 1 конфету, а далее при каждом следующем ходе каждый игрок берёт (по своему усмотрению) либо столько же конфет, сколько взял другой игрок последним ходом, либо на одну больше. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход по правилам. Кто из игроков может обеспечить себе выигрыш независимо от ходов другого? Сколько при правильной игре выигрывающий игрок возьмет конфет на свой пятый ход?